

**Chapitre 7**  
**Graphique de LORENZ et coefficient de GINI**  
*Dernière mise à jour le 20 juillet 2009*

0 – [Introduction](#)

1 – [Le graphique de LORENZ](#)

- A – L'exemple de la répartition des superficies de l'UE à 27
- B – L'utilité du graphique de LORENZ pour les comparaisons
- C – Cas général

2 – [Le coefficient de GINI](#)

- A – Définition
- B – Formules de calcul
- C - Exemple

3 – [Graphique de PARETO et graphique de LORENZ](#)

4 – [Résumé](#)

**Exercices corrigés (PDF) :**

TD5 2008 : [Sujets](#) - [Corrigés](#)

TD5 2009 : [Sujets](#) - [Corrigés](#)

[Voir aussi les sujets d'examens corrigés](#) (lien vers page HTML)

## 0 – Introduction

Max Otto LORENZ (1880 -1962) est l'économiste américain qui inventa le graphique qui représente la courbe qui porte son nom en 1905<sup>1</sup>. Il s'agissait pour lui de décrire et de mesurer les inégalités de revenu. Par la suite, cette courbe servit plus généralement à représenter visuellement la façon dont se répartit une masse (salariale, de revenus, de richesses, etc.) au sein d'une population pour se faire une idée du caractère plus ou moins égalitaire de la répartition de cette masse au sein de la population et comparer ainsi différentes populations entre elles ou comparer la distribution d'une masse au sein d'une population en deux ou plusieurs points du temps afin de savoir si l'inégalité augmente ou diminue<sup>2</sup>.

Corrado GINI (1884 -1965) est le statisticien, démographe, ethnologue et sociologue italien à qui on doit le coefficient de GINI, une mesure de l'inégalité associée à la courbe de LORENZ.

En pratique, lorsqu'on s'intéresse à la répartition d'une masse au sein d'une population, on trace d'abord un graphique de LORENZ afin d'avoir une idée visuelle de l'égalité ou de l'inégalité de cette répartition. Ensuite, si l'on désire résumer cette inégalité par un chiffre, on calcule le coefficient de GINI<sup>3</sup>.

## 1 – Le graphique de LORENZ

L'idée de base du graphique de LORENZ est de représenter la plus ou moins grande dispersion (plus ou moins grande concentration) d'une masse (de richesses, de revenus, de surfaces, etc.) au sein d'une population par un graphique inscrit dans un carré : l'axe des abscisses et celui des ordonnées varient de 1 à 100. Sur l'un des axes on représente la progression de la somme cumulée, exprimée en pourcentage de la population totale, des unités statistiques (rangées par ordre croissant des valeurs de la masse à répartir). Sur l'autre axe, on représente la progression de la somme cumulée de la masse, exprimée en pourcentage de la masse totale, que les unités statistiques de la population considérée se partagent. Comme l'expliquent Alain SCHÄRLIG et Olivier BLANC <sup>4</sup> « ... si le second cumul prend du retard en cours de route sur le premier – un retard qu'il rattrape ensuite, puisque par définition les deux cumuls doivent atteindre 100% à la fin de l'exercice – cela signifie que la masse n'est pas répartie uniformément, en d'autres termes qu'elle est concentrée dans certaines classes de la distribution. Sur la base de ce raisonnement, on donne alors la définition suivante : *la concentration est la présence, dans une partie de la distribution, d'une masse plus importante qu'ailleurs* ».

---

<sup>1</sup> L'expression consacrée est « courbe de LORENZ ». Voir LORENZ, M.O. (1905). Methods of measuring the concentration of wealth. Quarterly Publications of the American Statistical Association, 9 (New Series, No. 70), 209–219.

<sup>2</sup> L'expression « courbe de LORENZ » a probablement été utilisée pour la première fois en 1912 dans le manuel de W. I. KING, *The Elements of Statistical Method*. New York: Macmillan.

<sup>3</sup> Le coefficient de GINI n'est qu'un des indicateurs possibles de l'inégalité. Le lecteur intéressé par une vue d'ensemble des indicateurs de l'inégalité peut se rapporter à l'article de Wikipedia : [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Income\\_inequality\\_metrics&oldid=300414031](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Income_inequality_metrics&oldid=300414031)

<sup>4</sup> Alain SCHÄRLIG et Olivier BLANC, [Faire parler les chiffres, La statistique descriptive au service de la gestion](#), page 133 de l'édition 2000.

## A – L'exemple de la répartition des surfaces des 27 pays de l'UE

Pour introduire le graphique de LORENZ, prenons l'exemple de la répartition des superficies au sein de l'UE à 27. Ci-après, un tableau où les 27 pays de l'UE ont été classés par ordre de surface croissante (colonne 2), en partant de Malte (316 km<sup>2</sup>) jusqu'à la France métropolitaine (547030 km<sup>2</sup>).

La colonne 3 est simplement un cumul des pays de 0 à 27 (il s'agit des unités statistiques de notre population). La colonne 4 est un cumul des superficies des pays (il s'agit de la masse que les unités statistiques se répartissent). La colonne 5 reprend les chiffres de la colonne 3 divisés par 27 (nombre total des pays) et multiplié par 100. La colonne 6 reprend les chiffres de la colonne 4 divisés par 4236271 (surface totale de l'UE à 27) et multiplié par 100. Les chiffres des colonnes 5 et 6 nous permettent d'évaluer l'ampleur de l'inégalité de la répartition des surfaces au sein des pays de l'UE à 27

**Tableau pour le tracé d'un graphique de LORENZ de la répartition des superficies de l'UE à 27**

| Pays               | Superficie (km <sup>2</sup> ) | Cumul des pays | Cumul des superficies | Cumul des pays (en %) | Cumul des superficies (%) |
|--------------------|-------------------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
|                    |                               | 0              | 0                     | 0,0                   | 0,00                      |
| Malte              | 316                           | 1              | 316                   | 3,7                   | 0,01                      |
| Luxembourg         | 2586                          | 2              | 2902                  | 7,4                   | 0,07                      |
| Chypre             | 9250                          | 3              | 12152                 | 11,1                  | 0,28                      |
| Slovénie           | 20253                         | 4              | 32405                 | 14,8                  | 0,75                      |
| Belgique           | 30528                         | 5              | 62933                 | 18,5                  | 1,45                      |
| Pays-Bas           | 41526                         | 6              | 104459                | 22,2                  | 2,41                      |
| Danemark           | 43094                         | 7              | 147553                | 25,9                  | 3,41                      |
| Estonie            | 45226                         | 8              | 192779                | 29,6                  | 4,46                      |
| Slovaquie          | 48845                         | 9              | 241624                | 33,3                  | 5,59                      |
| Lettonie           | 64589                         | 10             | 306213                | 37,0                  | 7,08                      |
| Lituanie           | 65200                         | 11             | 371413                | 40,7                  | 8,59                      |
| Irlande            | 70280                         | 12             | 441693                | 44,4                  | 10,21                     |
| République tchèque | 78866                         | 13             | 520559                | 48,1                  | 12,03                     |
| Autriche           | 83858                         | 14             | 604417                | 51,9                  | 13,97                     |
| Portugal           | 92931                         | 15             | 697348                | 55,6                  | 16,12                     |
| Hongrie            | 93030                         | 16             | 790378                | 59,3                  | 18,27                     |
| Bulgarie           | 110910                        | 17             | 901288                | 63,0                  | 20,83                     |
| Grèce              | 131940                        | 18             | 1033228               | 66,7                  | 23,88                     |
| Roumanie           | 238391                        | 19             | 1271619               | 70,4                  | 29,39                     |
| Royaume-Uni        | 244820                        | 20             | 1516439               | 74,1                  | 35,05                     |
| Italie             | 301320                        | 21             | 1817759               | 77,8                  | 42,02                     |
| Pologne            | 312685                        | 22             | 2130444               | 81,5                  | 49,24                     |
| Finlande           | 337030                        | 23             | 2467474               | 85,2                  | 57,03                     |
| Allemagne          | 357021                        | 24             | 2824495               | 88,9                  | 65,29                     |
| Suède              | 449964                        | 25             | 3274459               | 92,6                  | 75,69                     |
| Espagne            | 504782                        | 26             | 3779241               | 96,3                  | 87,36                     |
| France             | 547030                        | 27             | 4326271               | 100,0                 | 100,00                    |

[Fichier EXCEL](#)

Ci-après, le graphique de LORENZ tracé à partir des données du tableau précédent. En abscisse, c'est le pourcentage cumulé de la population statistique qui est mesuré (ici la population statistique est constituée par les 27 pays), autrement dit les chiffres

de la colonne 5 du tableau. En ordonnée, c'est le pourcentage cumulé des superficies qui est mesuré, autrement dit les chiffres de la colonne 6 du tableau.

Le graphique de LORENZ s'inscrit donc dans un carré de côté 100 (car l'abscisse et l'ordonnée sont en pourcentage)<sup>5</sup>. Pour apprécier l'inégalité, on doit comparer cette courbe (en rouge sur le graphique) avec la droite d'égalité parfaite qui correspond à la diagonale (droite en vert).

On voit que le graphique permet de comparer la progression des deux pourcentages cumulés : celui des unités statistiques (les pays) et celui de la masse que ces unités se répartissent entre elles (la superficie totale de l'UE).

Si les deux pourcentages progressaient au même rythme, 10% des pays représenteraient 10% de la superficie totale de l'UE à 27, 20% des pays représenteraient 20% de la surface totale, etc. La courbe de LORENZ se confondrait alors avec la diagonale du carré.

Or, c'est loin d'être le cas puisqu'il faut 22 pays (81,5% des pays) pour atteindre 49,24% de la surface de l'UE à 27). En d'autres termes, le pourcentage cumulé des pays progresse plus vite que le pourcentage cumulé des superficies.

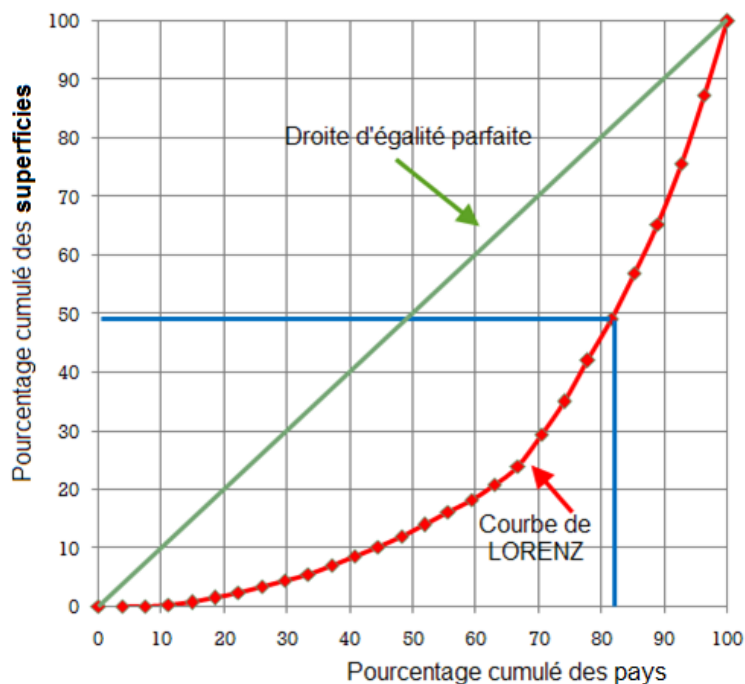
On atteint un point d'inflexion (entre 60% et 70% des pays) et ensuite le pourcentage cumulé de la masse se met à progresser plus rapidement que le pourcentage cumulé des pays.

Au total, la forme de la courbe de LORENZ nous indique la plus ou moins grande mesure dans laquelle la masse à répartir est inégalement distribuée.

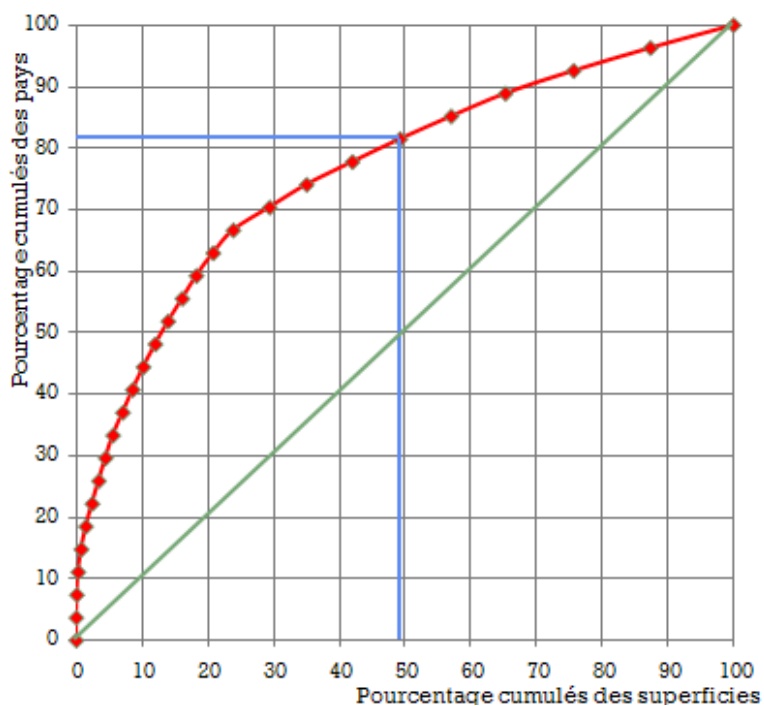
---

<sup>5</sup> Dans les formulations théoriques, on utilise plutôt les fréquences (pourcentages divisés par 100), auquel cas l'abscisse et l'ordonnée varient entre 0 et 1, donnant une courbe de LORENZ inscrite dans un carré de côté 1.

**Répartition des surfaces des pays de l'UE à 27**  
**(Les unités statistiques [pays] cumulées sont en abscisse) - [Fichier EXCEL](#)**



Dans son article original de 1905, LORENZ présentait la courbe avec les unités statistiques cumulées en ordonnées. Dans ce cas, on obtient le tracé suivant<sup>6</sup> :



<sup>6</sup> Il y a en tout 4 façons de présenter le graphique. Voir Chritian KLEIBER (2005), The Lorenz curve in economics and econometrics, page 4 , [http://www.statistik.tu-dortmund.de/fileadmin/user\\_upload/Lehrstuehle/MSind/SFB\\_475/2005/tr30-05.pdf](http://www.statistik.tu-dortmund.de/fileadmin/user_upload/Lehrstuehle/MSind/SFB_475/2005/tr30-05.pdf)

## **B – L'utilité de la courbe de LORENZ pour les comparaisons**

Soit maintenant un autre exemple concernant cette fois la masse salariale des deux filiales A et B d'une entreprise et sa répartition entre les salariés. Pour simplifier, nous supposons qu'il y a 20 salariés dans chaque entreprise (mais le nombre de salariés peut être différents d'une entreprise à l'autre). Les salaires mensuels en euros sont donnés par le tableau ci-après qui détaille également les calculs des deux séries nécessaires au tracé de la courbe de LORENZ.

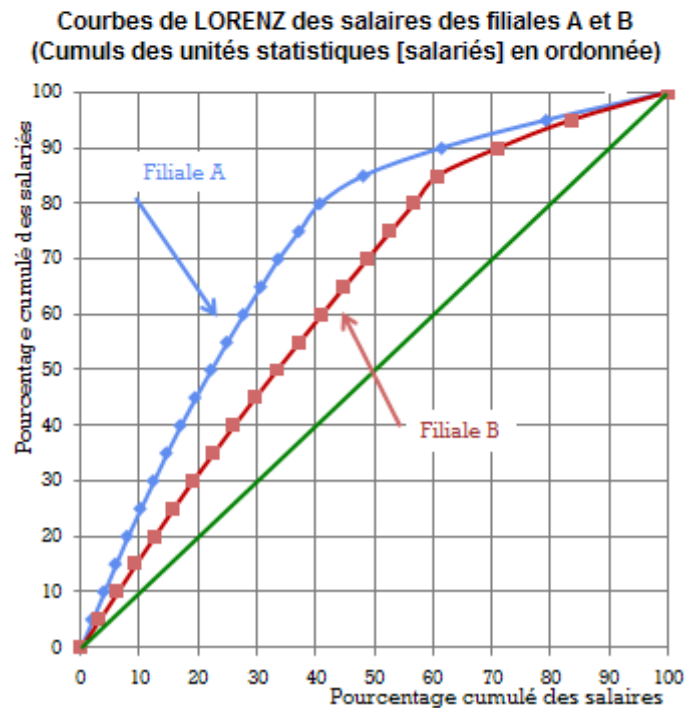
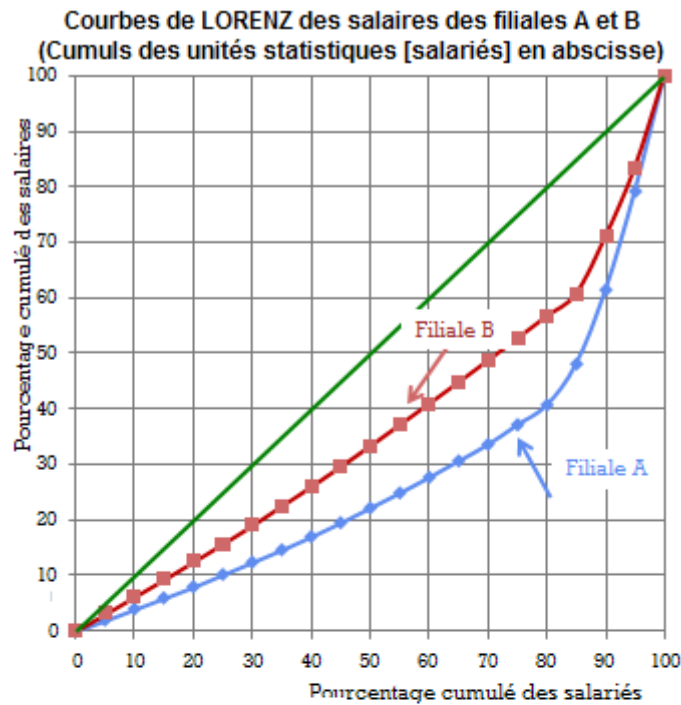
**Comparaisons de la distribution des salaires dans les filiales A et B d'une entreprise XXX et calculs nécessaires pour le tracé de la courbe de LORENZ**

| Salaires mensuels nets (€) |           |                 |                     | Cumuls salaires |           | Cumuls salaires (%) |           |
|----------------------------|-----------|-----------------|---------------------|-----------------|-----------|---------------------|-----------|
| Filiale A                  | Filiale B | Cumuls salariés | Cumuls salariés (%) | Filiale A       | Filiale B | Filiale A           | Filiale B |
|                            |           | 0               | 0                   | 0               | 0         | 0                   | 0         |
| 1300                       | 1500      | 1               | 5                   | 1300            | 1500      | 2                   | 3         |
| 1350                       | 1500      | 2               | 10                  | 2650            | 3000      | 4                   | 6         |
| 1350                       | 1500      | 3               | 15                  | 4000            | 4500      | 6                   | 9         |
| 1350                       | 1550      | 4               | 20                  | 5350            | 6050      | 8                   | 12        |
| 1500                       | 1550      | 5               | 25                  | 6850            | 7600      | 10                  | 16        |
| 1500                       | 1600      | 6               | 30                  | 8350            | 9200      | 12                  | 19        |
| 1500                       | 1700      | 7               | 35                  | 9850            | 10900     | 15                  | 23        |
| 1600                       | 1700      | 8               | 40                  | 11450           | 12600     | 17                  | 26        |
| 1700                       | 1740      | 9               | 45                  | 13150           | 14340     | 19                  | 30        |
| 1800                       | 1800      | 10              | 50                  | 14950           | 16140     | 22                  | 33        |
| 1820                       | 1840      | 11              | 55                  | 16770           | 17980     | 25                  | 37        |
| 1900                       | 1850      | 12              | 60                  | 18670           | 19830     | 28                  | 41        |
| 2000                       | 1870      | 13              | 65                  | 20670           | 21700     | 31                  | 45        |
| 2000                       | 1900      | 14              | 70                  | 22670           | 23600     | 34                  | 49        |
| 2400                       | 1920      | 15              | 75                  | 25070           | 25520     | 37                  | 53        |
| 2400                       | 1940      | 16              | 80                  | 27470           | 27460     | 41                  | 57        |
| 5000                       | 1960      | 17              | 85                  | 32470           | 29420     | 48                  | 61        |
| 9000                       | 5000      | 18              | 90                  | 41470           | 34420     | 61                  | 71        |
| 12000                      | 6000      | 19              | 95                  | 53470           | 40420     | 79                  | 83        |
| 14000                      | 8000      | 20              | 100                 | 67470           | 48420     | 100                 | 100       |

A

B

[Fichier EXCEL](#)



[Fichier EXCEL](#)

Sur le graphique ci-dessus, on constate que c'est la courbe de LORENZ de la filiale B qui est la plus proche de la droite d'égalité parfaite. C'est donc dans la filiale B que l'inégalité de la répartition des salaires est la moins grande. Par exemple, on voit que dans la filiale A, 50% des salariés reçoivent seulement 22% de la masse salariale, alors que dans la filiale B, 50 % des salariés reçoivent 33% de la masse salariale

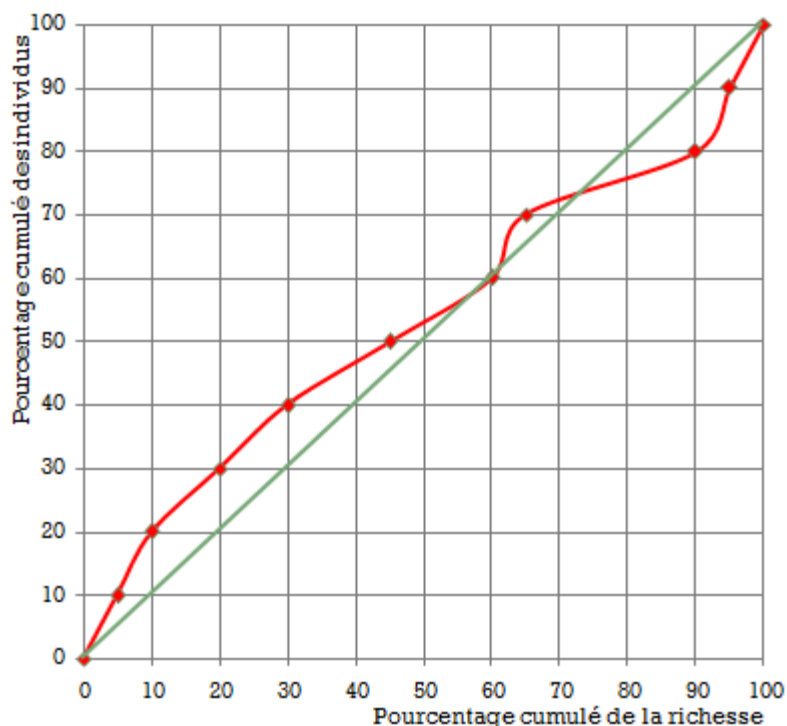
(voir les chiffres encadrés dans le tableau précédent). Si la distribution était parfaitement égalitaire, 50% des salariés recevraient 50% de la masse salariale.

### C – Cas général

De façon générale, plus une courbe de LORENZ se rapproche de la droite d'égalité parfaite et plus la répartition de la masse considérée au sein de la population est égalitaire. En effet, dans ce cas, la masse (des salaires, de la richesse, du revenu, etc.) est peu concentrée sur quelques uns.

Inversement, plus une courbe de LORENZ s'éloigne de la droite d'égalité parfaite et plus la répartition de la masse considérée au sein de la population est inégalitaire car la masse (des salaires, de la richesse, du revenu) est alors concentrée sur un petit nombre d'unités statistiques.

**Important :** par construction, il est impossible que le tracé de la courbe traverse la droite d'égalité parfaite. En d'autres termes, on ne peut pas avoir un graphique de LORENZ de la forme<sup>7</sup> :



[Fichier EXCEL](#)

Mais comment se peut-il que l'on puisse tracer le graphique si un tel cas est impossible ? **C'est parce que le graphique ci-dessus n'est pas un graphique de LORENZ.** En effet, si l'on analyse point par point les chiffres, on s'aperçoit que les données (ici la richesse de chacun des 10 individus) ne sont pas classées par ordre croissant des valeurs et que par conséquent il ne s'agit pas d'un graphique de

<sup>7</sup> Si une courbe de LORENZ ne peut pas traverser la diagonale du carré, deux courbes de LORENZ peuvent en revanche se croiser, rendant alors difficile l'analyse comparative de l'inégalité.

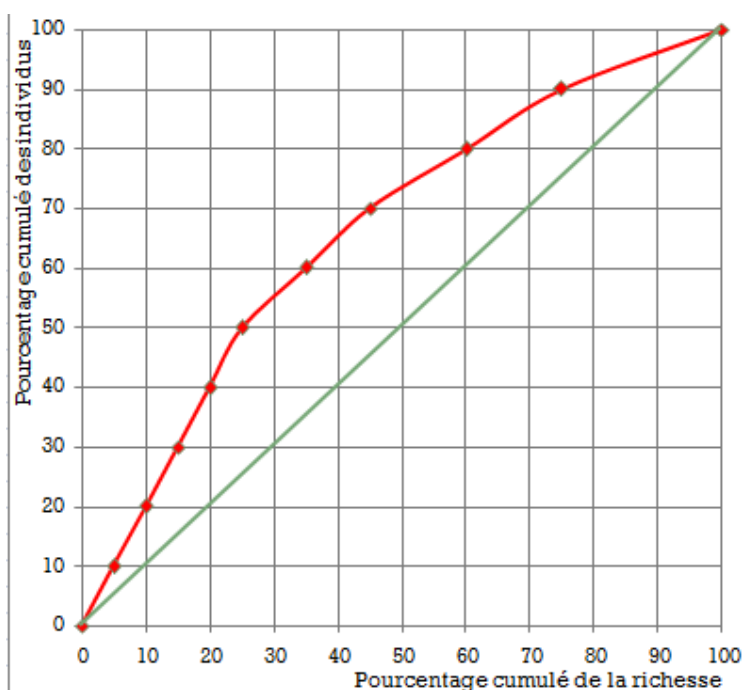
LORENZ (voir tableau ci-après, où l'on voit que les individus G, I et J ne sont pas classés correctement).

| Individus | Richesse | Cumul des individus | Cumul de la richesse | Cumul des individus (en %) | Cumul de la richesse (en %) |
|-----------|----------|---------------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
|           |          | 0                   | 0                    | 0                          | 0                           |
| A         | 5        | 1                   | 5                    | 10                         | 5                           |
| B         | 5        | 2                   | 10                   | 20                         | 10                          |
| C         | 10       | 3                   | 20                   | 30                         | 20                          |
| D         | 10       | 4                   | 30                   | 40                         | 30                          |
| E         | 15       | 5                   | 45                   | 50                         | 45                          |
| F         | 15       | 6                   | 60                   | 60                         | 60                          |
| G         | 5        | 7                   | 65                   | 70                         | 65                          |
| H         | 25       | 8                   | 90                   | 80                         | 90                          |
| I         | 5        | 9                   | 95                   | 90                         | 95                          |
| J         | 5        | 10                  | 100                  | 100                        | 100                         |

Si les individus étaient classés par ordre croissant de la richesse on aurait alors le tableau suivant :

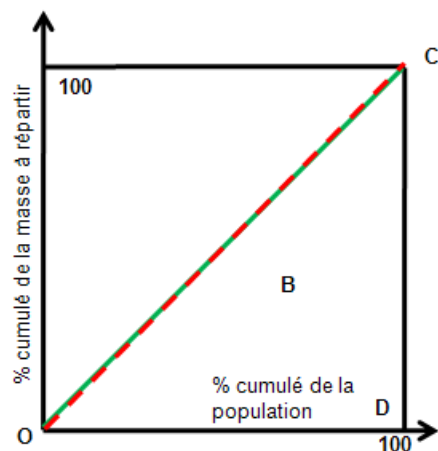
| Individus | Richesse | Cumul des individus | Cumul de la richesse | Cumul des individus (en %) | Cumul de la richesse (en %) |
|-----------|----------|---------------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
|           |          | 0                   | 0                    | 0                          | 0                           |
| A         | 5        | 1                   | 5                    | 10                         | 5                           |
| B         | 5        | 2                   | 10                   | 20                         | 10                          |
| G         | 5        | 3                   | 15                   | 30                         | 15                          |
| I         | 5        | 4                   | 20                   | 40                         | 20                          |
| J         | 5        | 5                   | 25                   | 50                         | 25                          |
| C         | 10       | 6                   | 35                   | 60                         | 35                          |
| D         | 10       | 7                   | 45                   | 70                         | 45                          |
| E         | 15       | 8                   | 60                   | 80                         | 60                          |
| F         | 15       | 9                   | 75                   | 90                         | 75                          |
| H         | 25       | 10                  | 100                  | 100                        | 100                         |

Et la courbe de LORENZ correcte est donc :

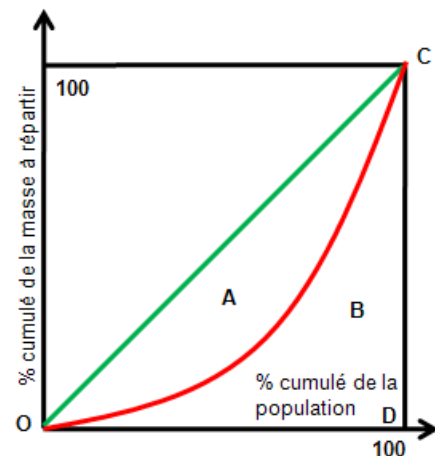


[Fichier EXCEL](#)

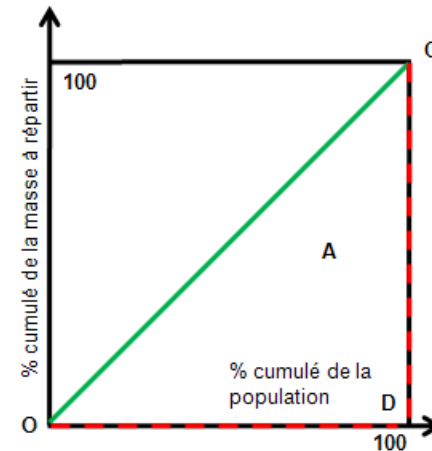
3 cas typiques, dont les deux cas limites, sont représentés par les graphiques ci-dessous  
 Les 3 cas du haut ont leur correspondant en bas, seul les axes changent ([Fichier pptx](#))



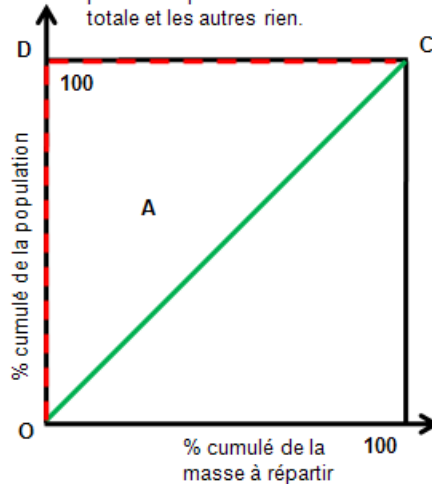
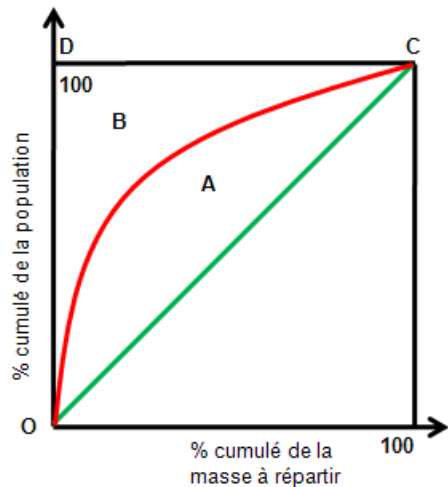
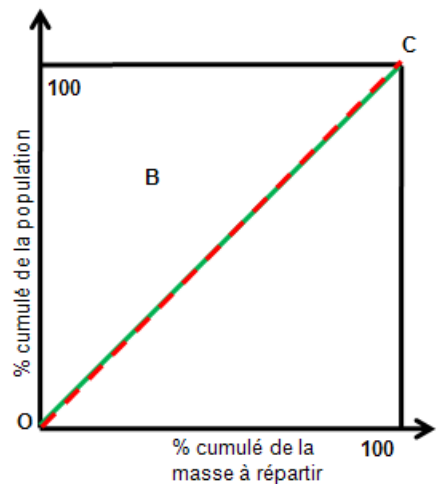
**Egalité parfaite :** la courbe de LORENZ (pointillés rouge) se confond avec la droite OC d'égalité parfaite. Chaque individu de la population possède la même part de la masse totale



**Cas intermédiaire :** la courbe de LORENZ partage le triangle ODC en deux surfaces. Plus la surface A augmente aux dépens de la surface B, plus l'inégalité augmente.



**Inégalité totale :** la courbe de LORENZ est formée des deux droites à 45 degrés OD et DC. La surface A occupe tout le triangle OCD et la surface B a disparu. C'est le cas théorique où une seule personne possède 100% de la masse totale et les autres rien.



## 2 – Graphique de PARETO et graphique de LORENZ

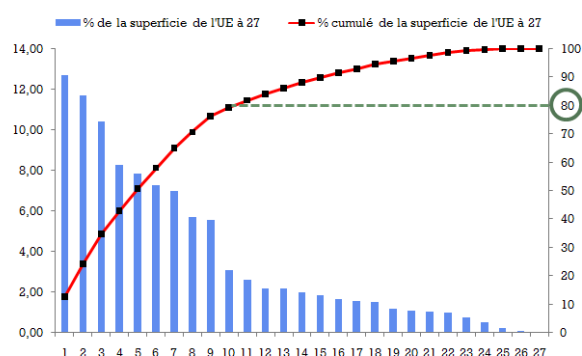
Nous avons vu dans le chapitre 5 que le graphique de PARETO était un cas particulier du graphique à échelle verticale double utilisé dans les contrôles de qualité (mais pas exclusivement) et basé sur la loi des 80/20, selon laquelle quelques causes majeures, une fois isolées, permettent de résoudre la plus grande partie d'un problème de qualité.

Il est intéressant de noter ici que la loi de PARETO est née de l'étude des problèmes de répartition de la richesse au sein des populations. Rappelons en effet que PARETO présenta sa loi en la formulant ainsi : 20% de la population italienne détient 80% des richesses.

L'équivalence entre le graphique de PARETO et le graphique de LORENZ est donc très naturelle. Les tableaux et les graphiques ci-après illustrent la correspondance entre les deux. Ce sont deux façons de présenter les mêmes résultats<sup>8</sup>. [Fichier EXCEL](#) - [Image JPEG agrandie](#).

Graphique de PARETO

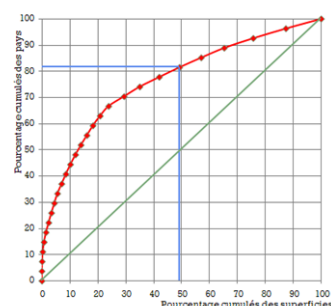
| Pays               | Superficie (km2) | Superficie (%) | % cumulés des superficies |
|--------------------|------------------|----------------|---------------------------|
| France             | 547030           | 12.64          | 12.64                     |
| Espagne            | 504782           | 11.67          | 24.31                     |
| Suède              | 449964           | 10.40          | 34.71                     |
| Allemagne          | 357021           | 8.25           | 42.97                     |
| Finlande           | 337030           | 7.79           | 50.76                     |
| Pologne            | 312685           | 7.23           | 57.98                     |
| Italie             | 301320           | 6.96           | 64.95                     |
| Royaume-Uni        | 244820           | 5.66           | 70.61                     |
| Roumanie           | 238391           | 5.51           | 76.12                     |
| Grèce              | 131940           | 3.05           | 79.17                     |
| Bulgarie           | 110910           | 2.56           | 81.73                     |
| Hongrie            | 93030            | 2.15           | 83.88                     |
| Portugal           | 92931            | 2.15           | 86.03                     |
| Autriche           | 83858            | 1.94           | 87.97                     |
| République tchèque | 78866            | 1.82           | 89.79                     |
| Irlande            | 70280            | 1.62           | 91.41                     |
| Lituanie           | 65200            | 1.51           | 92.92                     |
| Lettonie           | 64589            | 1.49           | 94.41                     |
| Slovaquie          | 48845            | 1.13           | 95.54                     |
| Estonie            | 45226            | 1.05           | 96.59                     |
| Danemark           | 43094            | 1.00           | 97.59                     |
| Pays-Bas           | 41526            | 0.96           | 98.55                     |
| Belgique           | 30528            | 0.71           | 99.25                     |
| Slovénie           | 20253            | 0.47           | 99.72                     |
| Chypre             | 9250             | 0.21           | 99.93                     |
| Luxembourg         | 2586             | 0.06           | 99.99                     |
| Malte              | 316              | 0.01           | 100.00                    |
| Total UE27         | 4326271          | 100.00         | 100.00                    |



Graphique de la courbe de LORENZ

| Pays               | Superficie (km2) | Cumul des pays | Cumul des superficies | Cumul des pays (en %) | Cumul des superficies (%) |
|--------------------|------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| Malte              | 316              | 1              | 316                   | 0.0                   | 0.00                      |
| Luxembourg         | 2586             | 2              | 2902                  | 7.4                   | 0.07                      |
| Chypre             | 9250             | 3              | 12152                 | 11.1                  | 0.28                      |
| Slovénie           | 20253            | 4              | 32405                 | 14.8                  | 0.75                      |
| Belgique           | 30528            | 5              | 62933                 | 18.5                  | 1.46                      |
| Pays-Bas           | 41526            | 6              | 104459                | 22.2                  | 2.41                      |
| Danemark           | 43094            | 7              | 147553                | 25.9                  | 3.41                      |
| Estonie            | 45226            | 8              | 192779                | 29.6                  | 4.46                      |
| Slovaquie          | 48845            | 9              | 241624                | 33.3                  | 5.59                      |
| Lettonie           | 64589            | 10             | 306213                | 37.0                  | 7.08                      |
| Lituanie           | 65200            | 11             | 371413                | 40.7                  | 8.59                      |
| Irlande            | 70280            | 12             | 441693                | 44.4                  | 10.21                     |
| République tchèque | 78866            | 13             | 520559                | 48.1                  | 12.03                     |
| Autriche           | 83858            | 14             | 604417                | 51.9                  | 13.97                     |
| Portugal           | 92931            | 15             | 697348                | 55.6                  | 16.12                     |
| Hongrie            | 93030            | 16             | 790378                | 59.3                  | 18.27                     |
| Bulgarie           | 110910           | 17             | 901288                | 63.0                  | 20.83                     |
| Grèce              | 131940           | 18             | 1033228               | 66.7                  | 23.88                     |
| Roumanie           | 238391           | 19             | 1271619               | 70.4                  | 29.39                     |
| Royaume-Uni        | 244820           | 20             | 1516439               | 74.1                  | 35.05                     |
| Italie             | 301320           | 21             | 1817759               | 77.8                  | 42.02                     |
| Pologne            | 312685           | 22             | 2130444               | 81.5                  | 49.24                     |
| Finlande           | 337030           | 23             | 2467474               | 85.2                  | 57.03                     |
| Allemagne          | 357021           | 24             | 2824495               | 88.9                  | 65.29                     |
| Suède              | 449964           | 25             | 3274459               | 92.6                  | 75.69                     |
| Espagne            | 504782           | 26             | 3779241               | 96.3                  | 87.26                     |
| France             | 547030           | 27             | 4326271               | 100.0                 | 100.00                    |

Tracé graphique de la courbe de LORENZ  
Répartition des surfaces des pays de l'UE à 27  
(Avec les unités statistiques [pays] cumulées en ordonnée)



## 3 – Le coefficient de GINI

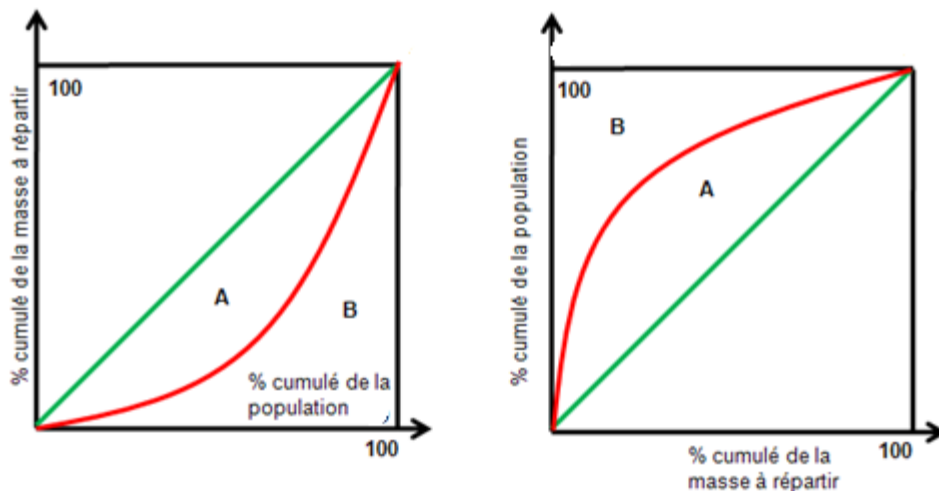
<sup>8</sup> La correspondance entre les 3 courbes peut être démontrée à l'aide des versions théoriques des trois courbes. Voir : [http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution).

## A – Définition

Le coefficient de Corrado GINI (1884 -1965) est une mesure de l'inégalité associée au graphique de LORENZ. Il est donné par la formule :

$$G = \frac{A}{A+B}$$

Les surfaces A et B se rapportent à la figure ci-après.



Le coefficient de GINI est compris entre zéro et 1. En cas d'égalité parfaite, il est égal à zéro (car  $A=0$ ). En cas d'inégalité totale il est égal à 1, car  $B=0$ . Par conséquent, à mesure que  $G$  augmente de zéro à 1, l'inégalité de la répartition augmente.

Sachant que la courbe de LORENZ est inscrite dans un graphique carré de  $1 \times 1$ , on voit que la surface  $A+B$  est égale à la moitié de cette surface. On a donc :

$$A+B = \frac{1}{2}$$

On peut de ce fait écrire :

$$G = \frac{A}{A+B} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = 2A$$

De plus, comme :

$$A + B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - B$$

Finalement, on peut écrire que :

$$G = \frac{A}{A + B} = 2A = 2\left(\frac{1}{2} - B\right) = 1 - 2B$$

## B – Formules de calcul

Il existe plusieurs formules de calcul du coefficient de GINI. Nous adopterons l'une des plus utilisées qui est donnée dans la notice explicative de la Banque mondiale pour le calcul de l'inégalité des répartitions<sup>9</sup>, parfois dite « formule de BROWN ». Cette formule s'écrit :

$$G = 1 - \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$$

où X est la part cumulée de la population, et Y la part cumulée de la masse à répartir. Dans le cas qui nous intéresse ici, comme les données sont connues individuellement cette formule peut se simplifier à :

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i+1})$$

Où n représente le nombre d'unités statistiques (la population).

Nous allons voir que ces deux formules donnent des résultats identiques.

---

<sup>9</sup> Voir [http://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_de\\_Gini](http://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient_de_Gini) .

### C – Exemple

Reprenons l'exemple des deux filiales de la même entreprise et calculons d'abord les deux coefficients de GINI à l'aide la première formule, soit :

$$G = 1 - \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$$

Les 2 tableaux ci-après montrent comment les calculs doivent être disposés pour parvenir rapidement au résultat.

Calcul du coefficient de GINI de la filiale A selon la formule :

$$G = 1 - \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$$

| A                           | B                            | C                                          | D                 | E                  | F                      | G                                   | H                 | I                                |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------------------|-------------------|--------------------|------------------------|-------------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| Salaires mensuels filiale A | Fréquences salaires mensuels | Fréquences cumulées salaires mensuels (Yi) | $(Y_i + Y_{i+1})$ | Nombre de salariés | Fréquence des salariés | Fréquence cumulée des salariés (Xi) | $(X_i - X_{i-1})$ | $(X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$ |
| 1300                        | 0,019                        | 0,019                                      | 0,019             | 1                  | 0,05                   | 0,05                                | 0,05              | 0,00096                          |
| 1350                        | 0,020                        | 0,039                                      | 0,059             | 1                  | 0,05                   | 0,1                                 | 0,05              | 0,00293                          |
| 1350                        | 0,020                        | 0,059                                      | 0,099             | 1                  | 0,05                   | 0,15                                | 0,05              | 0,00493                          |
| 1350                        | 0,020                        | 0,079                                      | 0,139             | 1                  | 0,05                   | 0,2                                 | 0,05              | 0,00693                          |
| 1500                        | 0,022                        | 0,102                                      | 0,181             | 1                  | 0,05                   | 0,25                                | 0,05              | 0,00904                          |
| 1500                        | 0,022                        | 0,124                                      | 0,225             | 1                  | 0,05                   | 0,3                                 | 0,05              | 0,01126                          |
| 1500                        | 0,022                        | 0,146                                      | 0,270             | 1                  | 0,05                   | 0,35                                | 0,05              | 0,01349                          |
| 1600                        | 0,024                        | 0,170                                      | 0,316             | 1                  | 0,05                   | 0,4                                 | 0,05              | 0,01578                          |
| 1700                        | 0,025                        | 0,195                                      | 0,365             | 1                  | 0,05                   | 0,45                                | 0,05              | 0,01823                          |
| 1800                        | 0,027                        | 0,222                                      | 0,416             | 1                  | 0,05                   | 0,5                                 | 0,05              | 0,02082                          |
| 1820                        | 0,027                        | 0,249                                      | 0,470             | 1                  | 0,05                   | 0,55                                | 0,05              | 0,02351                          |
| 1900                        | 0,028                        | 0,277                                      | 0,525             | 1                  | 0,05                   | 0,6                                 | 0,05              | 0,02626                          |
| 2000                        | 0,030                        | 0,306                                      | 0,583             | 1                  | 0,05                   | 0,65                                | 0,05              | 0,02915                          |
| 2000                        | 0,030                        | 0,336                                      | 0,642             | 1                  | 0,05                   | 0,7                                 | 0,05              | 0,03212                          |
| 2400                        | 0,036                        | 0,372                                      | 0,708             | 1                  | 0,05                   | 0,75                                | 0,05              | 0,03538                          |
| 2400                        | 0,036                        | 0,407                                      | 0,779             | 1                  | 0,05                   | 0,8                                 | 0,05              | 0,03894                          |
| 5000                        | 0,074                        | 0,481                                      | 0,888             | 1                  | 0,05                   | 0,85                                | 0,05              | 0,04442                          |
| 9000                        | 0,133                        | 0,615                                      | 1,096             | 1                  | 0,05                   | 0,9                                 | 0,05              | 0,05479                          |
| 12000                       | 0,178                        | 0,793                                      | 1,407             | 1                  | 0,05                   | 0,95                                | 0,05              | 0,07036                          |
| 14000                       | 0,207                        | 1,000                                      | 1,793             | 1                  | 0,05                   | 1                                   | 0,05              | 0,08963                          |
| 67470                       |                              |                                            |                   | 20                 |                        |                                     |                   | 0,54893                          |
|                             |                              |                                            |                   |                    |                        |                                     |                   | 0,45107                          |

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{20} (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1}) = 1 - 0,54893 = 0,45107$$

[Fichier EXCEL](#)

Calcul du coefficient de GINI de la filiale B selon la formule :

$$G = 1 - \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$$

| A                           | B                            | C                                          | D                 | E                  | F                      | G                                   | H                 | I                                |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------------------|-------------------|--------------------|------------------------|-------------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| Salaires mensuels filiale B | Fréquences salaires mensuels | Fréquences cumulées salaires mensuels (Yi) | $(Y_i + Y_{i+1})$ | Nombre de salariés | Fréquence des salariés | Fréquence cumulée des salariés (Xi) | $(X_i - X_{i-1})$ | $(X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1})$ |
| 1500                        | 0,031                        | 0,031                                      | 0,031             | 1                  | 0,05                   | 0,05                                | 0,05              | 0,00155                          |
| 1500                        | 0,031                        | 0,062                                      | 0,093             | 1                  | 0,05                   | 0,1                                 | 0,05              | 0,00465                          |
| 1500                        | 0,031                        | 0,093                                      | 0,155             | 1                  | 0,05                   | 0,15                                | 0,05              | 0,00774                          |
| 1550                        | 0,032                        | 0,125                                      | 0,218             | 1                  | 0,05                   | 0,2                                 | 0,05              | 0,01089                          |
| 1550                        | 0,032                        | 0,157                                      | 0,282             | 1                  | 0,05                   | 0,25                                | 0,05              | 0,01410                          |
| 1600                        | 0,033                        | 0,190                                      | 0,347             | 1                  | 0,05                   | 0,3                                 | 0,05              | 0,01735                          |
| 1700                        | 0,035                        | 0,225                                      | 0,415             | 1                  | 0,05                   | 0,35                                | 0,05              | 0,02076                          |
| 1700                        | 0,035                        | 0,260                                      | 0,485             | 1                  | 0,05                   | 0,4                                 | 0,05              | 0,02427                          |
| 1740                        | 0,036                        | 0,296                                      | 0,556             | 1                  | 0,05                   | 0,45                                | 0,05              | 0,02782                          |
| 1800                        | 0,037                        | 0,333                                      | 0,629             | 1                  | 0,05                   | 0,5                                 | 0,05              | 0,03147                          |
| 1840                        | 0,038                        | 0,371                                      | 0,705             | 1                  | 0,05                   | 0,55                                | 0,05              | 0,03523                          |
| 1850                        | 0,038                        | 0,410                                      | 0,781             | 1                  | 0,05                   | 0,6                                 | 0,05              | 0,03904                          |
| 1870                        | 0,039                        | 0,448                                      | 0,858             | 1                  | 0,05                   | 0,65                                | 0,05              | 0,04289                          |
| 1900                        | 0,039                        | 0,487                                      | 0,936             | 1                  | 0,05                   | 0,7                                 | 0,05              | 0,04678                          |
| 1920                        | 0,040                        | 0,527                                      | 1,014             | 1                  | 0,05                   | 0,75                                | 0,05              | 0,05072                          |
| 1940                        | 0,040                        | 0,567                                      | 1,094             | 1                  | 0,05                   | 0,8                                 | 0,05              | 0,05471                          |
| 1960                        | 0,040                        | 0,608                                      | 1,175             | 1                  | 0,05                   | 0,85                                | 0,05              | 0,05874                          |
| 5000                        | 0,103                        | 0,711                                      | 1,318             | 1                  | 0,05                   | 0,9                                 | 0,05              | 0,06592                          |
| 6000                        | 0,124                        | 0,835                                      | 1,546             | 1                  | 0,05                   | 0,95                                | 0,05              | 0,07728                          |
| 8000                        | 0,165                        | 1,000                                      | 1,835             | 1                  | 0,05                   | 1                                   | 0,05              | 0,09174                          |
| 48420                       |                              |                                            |                   | 20                 |                        |                                     |                   | 0,72365                          |
|                             |                              |                                            |                   |                    |                        |                                     |                   | 0,27635                          |

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{20} (X_i - X_{i-1})(Y_i + Y_{i+1}) = 1 - 0,72365 = 0,27635$$

[Fichier EXCEL](#)

On constate que le coefficient de GINI de la filiale A est beaucoup plus élevé que celui de la filiale B, indiquant que la distribution de la masse salariale y est plus inégalitaire. En effet, on a :

Coefficient de GINI de la filiale A = 0,45107

Coefficient de GINI de la filiale B = 0,27635

Voyons maintenant comment disposer les calculs en appliquant la deuxième formule (qui est plus simple et plus rapide tout en donnant les mêmes résultats)

**Calcul du coefficient de GINI de la filiale A selon la formule :**

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i+1})$$

| A                           | B                            | C                                          | D                 | E |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------------------|-------------------|---|
| Salaires mensuels filiale A | Fréquences salaires mensuels | Fréquences cumulées salaires mensuels (Yi) | $(Y_i + Y_{i+1})$ |   |
| 1300                        | 0,019                        | 0,01927                                    | 0,01927           |   |
| 1350                        | 0,020                        | 0,03928                                    | 0,05854           |   |
| 1350                        | 0,020                        | 0,05929                                    | 0,09856           |   |
| 1350                        | 0,020                        | 0,07929                                    | 0,13858           |   |
| 1500                        | 0,022                        | 0,10153                                    | 0,18082           |   |
| 1500                        | 0,022                        | 0,12376                                    | 0,22529           |   |
| 1500                        | 0,022                        | 0,14599                                    | 0,26975           |   |
| 1600                        | 0,024                        | 0,16971                                    | 0,31570           |   |
| 1700                        | 0,025                        | 0,19490                                    | 0,36461           |   |
| 1800                        | 0,027                        | 0,22158                                    | 0,41648           |   |
| 1820                        | 0,027                        | 0,24855                                    | 0,47013           |   |
| 1900                        | 0,028                        | 0,27672                                    | 0,52527           |   |
| 2000                        | 0,030                        | 0,30636                                    | 0,58307           |   |
| 2000                        | 0,030                        | 0,33600                                    | 0,64236           |   |
| 2400                        | 0,036                        | 0,37157                                    | 0,70757           |   |
| 2400                        | 0,036                        | 0,40714                                    | 0,77872           |   |
| 5000                        | 0,074                        | 0,48125                                    | 0,88839           |   |
| 9000                        | 0,133                        | 0,61464                                    | 1,09589           |   |
| 12000                       | 0,178                        | 0,79250                                    | 1,40714           |   |
| 14000                       | 0,207                        | 1,00000                                    | 1,79250           |   |
| 67470                       |                              |                                            | 10,97866          |   |
|                             |                              |                                            | 0,54893           |   |
|                             |                              |                                            | 0,45107           |   |

$$G = 1 - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (Y_i + Y_{i+1}) = 1 - 0,54893 = 0,45107$$

[Fichier EXCEL](#)

Calcul du coefficient de GINI de la filiale B selon la formule :

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i+1})$$

| A                                                                              | B                             | C                                              | D                 | E |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|-------------------|---|
| Salaire mensuel<br>filiale B                                                   | Fréquences<br>salaire mensuel | Fréquences<br>cumulées salaire mensuel<br>(Yi) | $(Y_i + Y_{i+1})$ |   |
| 1500                                                                           | 0,031                         | 0,03098                                        | 0,03098           |   |
| 1500                                                                           | 0,031                         | 0,06196                                        | 0,09294           |   |
| 1500                                                                           | 0,031                         | 0,09294                                        | 0,15489           |   |
| 1550                                                                           | 0,032                         | 0,12495                                        | 0,21789           |   |
| 1550                                                                           | 0,032                         | 0,15696                                        | 0,28191           |   |
| 1600                                                                           | 0,033                         | 0,19000                                        | 0,34696           |   |
| 1700                                                                           | 0,035                         | 0,22511                                        | 0,41512           |   |
| 1700                                                                           | 0,035                         | 0,26022                                        | 0,48534           |   |
| 1740                                                                           | 0,036                         | 0,29616                                        | 0,55638           |   |
| 1800                                                                           | 0,037                         | 0,33333                                        | 0,62949           |   |
| 1840                                                                           | 0,038                         | 0,37133                                        | 0,70467           |   |
| 1850                                                                           | 0,038                         | 0,40954                                        | 0,78088           |   |
| 1870                                                                           | 0,039                         | 0,44816                                        | 0,85770           |   |
| 1900                                                                           | 0,039                         | 0,48740                                        | 0,93556           |   |
| 1920                                                                           | 0,040                         | 0,52705                                        | 1,01446           |   |
| 1940                                                                           | 0,040                         | 0,56712                                        | 1,09418           |   |
| 1960                                                                           | 0,040                         | 0,60760                                        | 1,17472           |   |
| 5000                                                                           | 0,103                         | 0,71086                                        | 1,31846           |   |
| 6000                                                                           | 0,124                         | 0,83478                                        | 1,54564           |   |
| 8000                                                                           | 0,165                         | 1,00000                                        | 1,83478           |   |
| 48420                                                                          |                               |                                                | 14,47295          |   |
|                                                                                |                               |                                                | 0,72365           |   |
|                                                                                |                               |                                                | 0,27635           |   |
| $G = 1 - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (Y_i + Y_{i+1}) = 1 - 0,72365 = 0,27635$ |                               |                                                |                   |   |

[Fichier EXCEL](#)

On constate que les coefficients de GINI de la filiale A et de la filiale B obtenus avec la seconde formule sont identiques à ceux obtenus avec la première formule. **On pourra donc préférer utiliser la seconde formule dans les calculs (lorsque les données sont connues individuellement) car elle est la plus simple.**

## 4 – Résumé

La **courbe de GINI** sert à représenter visuellement la façon dont se répartit une masse (salariale, de revenus, de richesses, etc.) au sein d'une population pour se faire une idée du caractère plus ou moins égalitaire de la répartition de cette masse au sein de la population et comparer ainsi différentes populations entre elles ou comparer la distribution d'une masse au sein d'une population en deux ou plusieurs points du temps afin de savoir si l'inégalité augmente ou diminue.

Il existe une correspondance entre le graphique de PARETO et le graphique de la courbe de LORENZ.

Le **coefficient de GINI** est un indicateur statistique, compris entre 0 et 1, qui sert à mesurer le degré d'inégalité de la répartition d'une masse au sein d'une population statistique.

### Exercices corrigés (PDF) :

TD5 2008 : [Sujets](#) - [Corrigés](#)

TD5 2009 : [Sujets](#) - [Corrigés](#)

[Voir aussi les sujets d'examens corrigés](#) (lien vers page HTML)