

Chapitre 4
Indices et progressions
Dernière mise à jour le 18 juin 2009

0 – [Introduction](#)

1 – [Indices](#)

- A – [Nombre indice élémentaire](#)
- B – [Série indice élémentaire](#)
- C – [Indice synthétique](#)
 - 1) [Définition](#)
 - 2) [Indice synthétique d'évolution des prix de LASPEYRES](#)
 - a) [Définition](#)
 - b) [Exemple](#)
 - 3) [Indice d'évolution des quantités de LASPEYRES](#)
 - a) [Définition](#)
 - b) [Exemple](#)
 - 4) [Indice des prix de l'INSEE](#)

2 – [Progressions](#)

- A – [Variation absolue](#)
- B – [Taux de croissance sur une période](#)
- C – [Taux de croissance sur plusieurs périodes : formule du taux moyen](#)
 - 1) [Formule de calcul directe](#)
 - a) [Définition](#)
 - b) [Exemple](#)
 - 2) [Formule indirecte \(en passant par les accroissements successifs\)](#)
 - a) [définition](#)
 - b) [Exemple](#)
- D – [Taux de croissance du produit de 2 valeurs](#)
- E – [Taux de croissance du rapport de 2 valeurs](#)
- F – [Compléments](#)
 - 1) [Augmentations \(diminutions\) successives](#)
 - 2) [Augmentation en pourcentage suivie d'une diminution identique](#)
 - 3) [Temps de doublement d'une grandeur](#)

3 – [Résumé](#)

[Annexe : Démonstration des formules de calcul du taux de croissance moyen](#)

0 – Introduction

Nous avons vu au chapitre 2 que les chiffres d'une série pouvaient être présentés sous forme d'effectifs, de pourcentages et de pourcentages cumulés. Mais ce n'est pas tout : les chiffres d'une série peuvent aussi être mis sous forme d'**indices**. De plus, il est fréquent que l'on souhaite étudier une série dont les valeurs changent au cours du temps ou bien, plus simplement, que les valeurs d'une seule série correspondent à différentes valeurs dans le temps (il s'agit alors d'une série chronologique). Dans ces deux cas, le calcul d'un **indicateur de progression** (taux de variation ou taux de croissance) va permettre de résumer l'évolution avec un seul chiffre. Les indices et les progressions sont aussi utilisés pour comparer des situations (généralement deux séries dont les valeurs changent selon le lieu).

1 – Indices

A - Nombre indice élémentaire

Un nombre indice est une mesure de la variation d'une **grandeur courante** comparée à une **grandeur de référence** et appelée « base ».

Exemple : Au 1^{er} janvier 2009, le prix d'un produit A s'établissait à 8 euros. Au 1^{er} février 2009, le prix de ce produit A s'établissait à 8,5 euros.

On appelle **période (ou date) de base** ou **période (ou date) de référence**, la période(ou date) la plus ancienne. Ici, la période de référence est le 1^{er} janvier 2009.

On appelle **période (ou date) courante** ou **période (ou date) finale**, la période (ou date) la plus récente. Ici, la période courante est le 1^{er} février 2009.

Notons par X la grandeur étudiée, par x_0 , la période de référence et par x_t la période courante.

Pour mesurer l'évolution de la grandeur X de x_0 à x_t , on calcule l'*indice élémentaire* suivant :

$$I_{t/0} = \frac{\text{Grandeur courante}}{\text{Grandeur de référence}} = \frac{x_t}{x_0} \times 100$$

Dans notre exemple du produit A, cela donne :

$$I_{t/0} = \frac{8,5}{8} \times 100 = 1,0625 \times 100 = 106,25$$

Lecture : La lecture de cet indice d'évolution se fait de la manière suivante. On dit que l'évolution entre la période 0 et la période t (ici entre le 1^{er} janvier 2009 et le 1^{er} février 2009) est de 6,25%.

Remarque : Dans l'exemple précédent, la variation de la grandeur se faisait dans le temps. On désigne l'indice qui la mesure par l'expression **indice temporel**. Mais la variation d'une grandeur n'a pas toujours lieu dans le temps. Elle peut avoir lieu dans l'espace.

Un **indice de situation**, également appelé **indice spatial**, est un indice qui concerne n'importe quelle comparaison de grandeur, hormis les comparaisons temporelles.

Exemple : En 2006, le nombre de victimes d'accidents de la route en France a été de 77 par million d'habitants, alors qu'au Portugal il a été de 104 par million d'habitants¹. L'indice de situation du nombre de victimes d'accidents est égal à $(104/77)*100 = 135,06$, **si l'on prend le nombre d'accidents en France comme base**, soit 35,06% de plus au Portugal qu'en France.

B – Série indice élémentaire

Une **série indice** est une série de chiffre divisée par une de ses valeurs et multipliée par 100.

Exemple : Soit la série $S_1 = \{1, 3, 7, 4, 8, 6, 11, 9\}$

Pour transformer cette série en série indice, nous allons diviser chaque élément de la série par l'un des éléments, par exemple 7 (troisième élément) et ensuite multiplier chaque élément par 100. On obtient alors :

$$I_1 = \{14,3 ; 42,9 ; 100 ; 57,1 ; 114,3 ; 85,7 ; 157,1 ; 128,6\}$$

I_1 est une série indice. Sa base "100" est le troisième élément de la série. On voit ainsi que le choix de la "base" est arbitraire.

On aurait pu aussi diviser par le premier élément de la série.

Mais plutôt que de repartir de la série initiale S_1 , on peut aussi partir de I_1 et diviser chaque élément par 14,3 et multiplier par 100. On a alors effectué un **changement de base**, la nouvelle base étant le premier élément de la série.

$$I_2 = [I_1/I_1(1)]*100 = \{100, 300, 700, 400, 800, 600, 1100, 900\}$$

C – Indice synthétique

1) Définition

Un **indice synthétique** permet de mesurer l'évolution d'un ensemble de grandeurs. L'exemple le plus connu est l'**indice synthétique d'évolution des prix**.

Un autre indice synthétique est aussi souvent calculé : c'est l'**indice synthétique d'évolution des quantités**.

¹ Chiffres publiés par l'OCDE :

http://oberon.sourceoecd.org/vl=2311694/cl=16/nw=1/rpsv/factbook_fre/11-04-02.htm

Il existe plusieurs méthodes de calcul des indices synthétiques. Le plus fréquemment utilisé de nos jours est l'indice de LASPEYRES. C'est pourquoi nous n'étudierons que cet indice dans ce cours introductif.

2) Indice synthétique d'évolution des prix de LASPEYRES

Pour calculer l'indice synthétique d'évolution du niveau général des prix l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Études Économiques) définit un panier à provision représentatif des produits acheté par un ménage type et il mesure ensuite l'évolution des prix des biens qui composent ce panier entre deux dates.

a) Définition

L'**indice de LASPEYRES d'évolution des prix** mesure l'évolution, entre deux dates 0 et t, des prix des biens qui composent un panier, en prenant comme référence la valeur du panier à la date initiale (t = 0) et en supposant que les quantités de biens dans le panier n'ont pas varié entre 0 et t.

b) Exemple

Soit le tableau ci-après, qui donne les prix et les quantités de deux produits 1 et 2, aux dates 0 et t. On peut supposer que le produit 1 est un pantalon et le produit 2 un tee shirt ([voir le fichier EXCEL](#)).

	Date 0		Date t	
Produit 1	$p_0^1=15$	$q_0^1=3$	$p_t^1=22$	$q_t^1=10$
Produit 2	$p_0^2=7$	$q_0^2=9$	$p_t^2=5$	$q_t^2=8$

Dans cet exemple, le prix du bien 1 (pantalon) augmente (de 15 à 22 euros) tandis que celui du bien 2 (tee shirt) baisse (de 7 à 5 euros).

Mais les quantités aussi ont changé. Pour diverses raisons, les gens ont acheté plus de pantalons et moins de tee-shirts. Il n'est pas nécessaire que ces quantités évoluent en sens inverse des prix car il ne s'agit pas d'une relation instantanée, mais d'une évolution dans le temps. Pour mesurer l'évolution des prix, LASPEYRES suppose donc que les quantités ne changent pas. Il pose la question : **quelle serait l'évolution de la valeur de ce panier si les quantités n'avaient pas changé ?**

Pour répondre à cette question et savoir si l'indice synthétique des prix ainsi défini augmente ou baisse, appliquons la formule de LASPEYRES d'évolution des prix :

$$L_{t/0}^P = \frac{\sum_{i=1}^n p_t^i q_0^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i q_0^i} \times 100 = \frac{p_t^1 q_0^1 + p_t^2 q_0^2}{p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2} \times 100 = \frac{(22 \times 3) + (5 \times 9)}{(15 \times 3) + (7 \times 9)} \times 100 = \frac{66 + 45}{45 + 63} \times 100 = \frac{111}{108} \times 100 = 102,8$$

On enregistre donc une évolution des prix du panier de bien de 2,8 % selon la formule de LASPEYRES

3) Indice d'évolution des quantités de LASPEYRES

a) Définition

L'indice de LASPEYRES d'évolution des quantités mesure l'évolution, entre deux dates 0 et t, des quantités des biens qui composent un panier, en prenant comme référence la valeur du panier à la date initiale (t=0) et en supposant que les prix des biens dans le panier n'ont pas varié entre 0 et t.

b) Exemple

Reprenons le tableau précédent, qui donne les prix et les quantités de deux produits 1 et 2, aux dates 0 et t [voir le fichier EXCEL](#)).

	Date 0		Date t	
Produit 1	$p_0^1=15$	$q_0^1=3$	$p_t^1=22$	$q_t^1=10$
Produit 2	$p_0^2=7$	$q_0^2=9$	$p_t^2=5$	$q_t^2=8$

Dans cet exemple, la quantité du bien 1 augmente (de 3 à 10 unités) tandis que celle du bien 2 baisse (de 9 à 8 unités). Pour savoir si l'indice synthétique des volumes augmente ou baisse, appliquons la formule de LASPEYRES d'évolution des quantités :

$$I_{t/0}^P = \frac{\sum_{i=1}^n p_0^i q_t^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i q_0^i} \times 100 = \frac{p_0^1 q_t^1 + p_0^2 q_t^2}{p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2} \times 100 = \frac{(15 \times 10) + (7 \times 8)}{(15 \times 3) + (7 \times 9)} \times 100 = \frac{150 + 56}{45 + 63} \times 100 = \frac{206}{108} \times 100 = 190,74$$

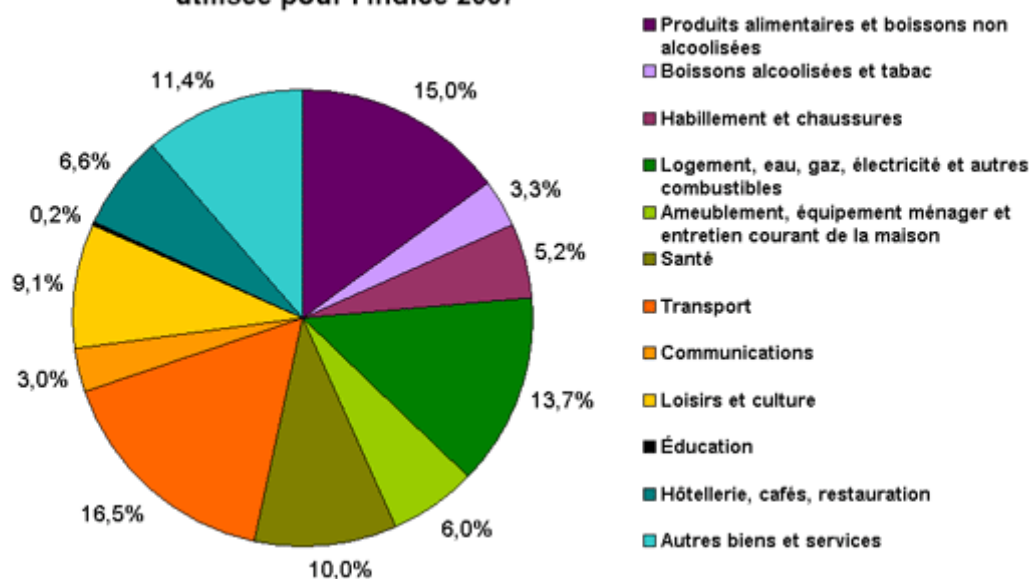
On enregistre donc une évolution des volumes du panier de bien de 90,74 % selon la formule de LASPEYRES.

4) Indice des prix de l'INSEE

L'un des indices synthétiques les plus connus et les plus utilisés est l'**indice des prix à la consommation (IPC) publié chaque mois par l'INSEE**. L'IPC permet de mesurer l'inflation, c'est-à-dire la variation du niveau général des prix des biens et des services consommés par les ménages sur le territoire français entre deux périodes données. C'est une mesure synthétique des évolutions de prix à qualité constante.

Pour le calculer, l'INSEE applique la formule de l'indice de LASPEYRES des prix à un échantillon de quelques 21000 indices élémentaires. Ces 21000 indices élémentaires sont calculés à partir de prix recueillis dans 106 agglomérations de plus de 2000 habitants réparties sur tout le territoire. L'indice couvre plus de 1000 variétés de produits, regroupées en 161 groupes. Pour éviter toute tentative de manipulation des prix, la liste précise de ces 1000 variétés de produits reste confidentielle. Actuellement, la période de référence, ou « base » de l'IPC, est 1998. Ci-après, le camembert qui donne la structure des pondérations par grandes catégories de consommation.

**Structure de la consommation de l'ensemble des ménages
utilisée pour l'indice 2007**



Source : Insee, http://www.insee.fr/fr/indicateur/indic_cons/info_ipc.htm

L'IPC est publié aux environs du 13 de chaque mois et porte sur l'évolution des prix du mois précédent. Ce chiffre, régulièrement relayé par les médias, est très attendu car il sert de multiples fonctions économiques parmi lesquelles la connaissance de l'inflation, la définition des objectifs de la politique monétaire, mais aussi le versement de pensions et de divers revenus, tels le SMIC, dont le montant est « indexé » sur l'évolution de l'IPC.

Depuis le milieu de l'année 2006, l'indice des prix a fait l'objet de critiques et de controverses. Pour répondre à ces critiques l'Insee met sur son site Internet, à disposition, un simulateur qui permet instantanément de mesurer "son" indice des prix personnels. Il est disponible à ce lien :

http://www.insee.fr/fr/indicateur/indic_cons/indic_sip.htm

Le tableau résumé de l'évolution des prix publié par l'INSEE en est disponible à l'URL : http://www.insee.fr/fr/indicateur/indic_conj/indconj_frame.asp?ind_id=29)

2 - Progressions

Soit la valeur numérique V au temps t qui s'écrit respectivement V_0 quand $t=0$, V_1 quand $t=1$ et V_t quand t est une date quelconque.

A - Variation absolue

La variation absolue de la valeur V entre le temps 0 et le temps t s'écrit :

$$\Delta V = V_t - V_0$$

Exemple : Soit $V_0 = 1\,500$ euros la somme dont je dispose à la date 0 et $V_1 = 2\,000$ euros la somme dont je dispose à la date 1.

Ici, $t=1$, donc la **variation absolue** entre la date 0 et la date 1 s'écrit :

$$V_1 - V_0 = 2\,000 - 1\,500 = 500$$

B - Taux de croissance sur une période

Le **taux de croissance** sur une période de la valeur V entre $t = 0$ (date du début de la période) et $t = 1$ (date de fin de la période) s'écrit² :

$$g_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Calculons le taux de croissance, entre la date 0 et la date 1, de la somme dont je dispose :

$$g_1 = (2\,000 - 1\,500) / 1\,500 = 500 / 1\,500 = 0,33333$$

Le taux g_1 s'exprime fréquemment en pourcentages. Dans ce cas on le multiplie par 100. Ainsi la somme dont je dispose a augmenté de $0,33333 \times 100 = 33,33\%$.

² Le mot « valeur » est ici employé au sens de « grandeur », pas dans le sens de « valeur monétaire », quoiqu'on puisse également appliquer la formule à des valeurs monétaires, mais pas uniquement.

C - Taux de croissance sur plusieurs périodes : formule du taux moyen

Il existe deux façons équivalentes de calculer le taux de croissance moyen d'une grandeur sur plusieurs périodes. Ces deux façons donnent le même résultat. La première est plus rapide que la seconde.

1) Formule de calcul directe

a) Définition

Soit une grandeur G qui prend les valeurs $V_0, V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_t$. La **formule directe du taux de croissance moyen** de 0 à t est donnée par l'expression³ :

$$g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Où g = taux de croissance moyen, V_0 = grandeur à la date 0, V_t = grandeur à la date t et le t qui figure dans l'exposant $1/t$ est le nombre de périodes sur lequel le taux moyen est calculé.

b) Exemple

Soit une entreprise dont le chiffre d'affaires en euros de 2004 à 2008 est donné par le tableau ci-dessous : ([Fichier EXCEL](#))

Années	V	Chiffre d'affaires
2004	V_0	210000
2005	V_1	280000
2006	V_2	330000
2007	V_3	450000
2008	V_4	500000

Ici, on a $V_0 = 210000$ et $V_t = V_4 = 500000$. Donc

$$g = \left[\frac{V_4}{V_0} \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = \left[\frac{500000}{210000} \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,242189 - 1 = 0,242189$$

([Fichier EXCEL](#))

Soit un taux de croissance moyen égal à 24,2%.

³ Voir l'annexe à ce chapitre pour la démonstration de cette formule.

2) Formule indirecte (en passant par les accroissements successifs)

a) définition

Le taux de croissance moyen g peut aussi s'écrire⁴ :

$$g = \left[(1 + g_t)(1 + g_{t-1}) \dots (1 + g_2)(1 + g_1) \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Avec :

$$g_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{V_{i-1}}$$

Où i varie de 1 à t .

b) Exemple

Calculons le taux de croissance annuel du CA entre 2004 et 2005, puis entre 2005 et 2006, 2006-07 et enfin 2007-08. Nous allons ainsi avoir 4 taux de croissance g_1 , g_2 , g_3 et g_4 . Le tableau ci-dessous résume les calculs :

		g_i	$1 + g_i$
2004- 05	g_1	0,33333333	1,33333333
2005- 06	g_2	0,17857143	1,17857143
2006- 07	g_3	0,36363636	1,36363636
2007- 08	g_4	0,11111111	1,11111111

([Fichier EXCEL](#))

Ainsi, pour la première période, 2004-05, on aura :

$$g_1 = \frac{280000 - 210000}{210000} = \frac{70000}{210000} = 0,3333$$

Et ainsi de suite pour g_2 (2005-06), g_3 (2006-07) et g_4 (2007-08).

La dernière colonne du tableau donne $(1+g_1)$, $(1+g_2)$, $(1+g_3)$ et $(1+g_4)$. Effectuons le produit :

$$(1+g_1) \times (1+g_2) \times (1+g_3) \times (1+g_4) = 1,333 \times 1,17857 \times 1,36363 \times 1,11111 = 2,38095238$$

⁴ Voir l'annexe à ce chapitre pour la démonstration de cette formule.

Puis élevons ce produit à la puissance $1/4 = 0,25$:

$$[(1+g_1) \times (1+g_2) \times (1+g_3) \times (1+g_4)]^{(1/4)} = (2,38095238)^{(1/4)} = 1,242189$$

Il nous reste à calculer g :

$$1+g = 1,242189 \Leftrightarrow g = 0,242189$$

Soit un taux de croissance annuel moyen en pourcentage de 24,2 % ([Fichier EXCEL](#)).

D - Taux de croissance du produit de 2 valeurs

En économie, on raisonne fréquemment sur des valeurs qui sont en fait le produit d'un prix et d'une quantité. C'est le cas par exemple de la recette totale, dont la définition est :

$$RT = p \times q$$

p est le prix d'un produit quelconque et q sa quantité. Dans ce cas, si le prix varie et que la quantité varie aussi, on peut souhaiter calculer le taux de croissance du produit des deux, c'est-à-dire le taux de croissance de la recette totale.

Soient le prix p_t et la quantité q_t . L'évolution du prix p_t et de la quantité q_t par rapport à la période précédente peut s'exprimer ainsi :

$$p_t = (1+g_p)p_{t-1}$$

$$q_t = (1+g_q)q_{t-1}$$

où g_p et g_q sont les taux de croissance respectivement du prix et de la quantité entre $t-1$ et t .

Partant de ces deux expressions, la recette totale en t s'écrit alors :

$$RT_t = p_t q_t = (1 + g_p)(1 + g_q)p_{t-1} q_{t-1} = (1 + g_p)(1 + g_q)RT_{t-1}$$

On en déduit son taux de croissance entre $t-1$ et t :

$$g_{RT} = (RT_t / RT_{t-1}) - 1 = (1 + g_p)(1 + g_q) - 1$$

Exemple : Un commerçant augmente le prix d'un produit de 1% ($g_p = 0,01$). À la suite de cette augmentation, la quantité vendue baisse de 4% ($g_q = -0,04$). Pour connaître l'évolution de la recette totale, on va calculer son taux de croissance à partir de la formule précédente:

$$g_{RT} = (RT_t / RT_{t-1}) - 1 = (1 + g_p)(1 + g_q) - 1$$

$$g_{RT} = (1 + 0,01)(1 - 0,04) - 1 = (1,01 \times 0,96) - 1 = 0,9696 - 1 = -0,0304$$

La recette totale a diminué de 3,04% à la suite de la hausse du prix de 1% et de la baisse de la quantité de 4%.

E - Taux de croissance du rapport de 2 valeurs

De la même façon que l'on a parfois besoin de connaître le taux de croissance du produit de 2 grandeurs, il arrive aussi que l'on ait besoin de connaître le taux de croissance du rapport de deux grandeurs. C'est le cas par exemple de la productivité apparente du travail, dont la définition est :

$$\text{Productivité} = \frac{Y}{L}$$

où Y = production exprimée en euros et L = nombre d'heures travaillées. Dans ce cas, si la production varie et que le nombre d'heures de travail varie aussi, on peut calculer le taux de croissance du rapport des deux, c'est-à-dire le taux de croissance de la productivité apparente du travail.

Soient la production Y_t et le travail L_t . Leur évolution par rapport à la période précédente peut s'exprimer ainsi :

$$Y_t = (1+g_Y)Y_{t-1}$$

$$L_t = (1+g_L)L_{t-1}$$

où g_Y et g_L sont les taux de croissance respectivement de la production et du travail entre t-1 et t.

Partant de ces deux expressions, la productivité à la date t s'écrit alors :

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{(1+g_Y)Y_{t-1}}{(1+g_L)L_{t-1}}$$

On en déduit son taux de croissance entre t-1 et t :

$$g_{\text{productivité}} = \frac{\frac{Y_t}{L_t}}{\frac{Y_{t-1}}{L_{t-1}}} - 1 = \frac{(1+g_Y)}{(1+g_L)} - 1$$

Exemple : La production augmente de 10% et le nombre d'heures travaillées augmente de 4%. Quelle est l'augmentation de la productivité ?

$$g_{\text{productivité}} = \frac{(1+g_Y)}{(1+g_L)} - 1 = \frac{1+0,1}{1+0,04} - 1 = \frac{1,1}{1,04} - 1 = 1,057 - 1 = 0,0576923$$

La productivité a augmenté de 5,769%.

F - Compléments

1) Augmentations (diminutions) successives

Lorsque qu'une grandeur croît successivement à des taux différents à chaque période et que l'on veut connaître la valeur de la grandeur au terme des augmentations ou diminutions successives on applique la formule suivante :

$$V_t = V_0 \prod_{i=1}^t (1 + g_i)$$

Exemple : Soit $V_0=10$ et $g_1=10\%$, $g_2=12\%$, $g_3=-5\%$. Déterminer V_3 .

On a :

$$V_3 = V_0 (1 + g_1)(1 + g_2)(1 + g_3)$$

Donc :

$$V_3 = V_0 (1 + g_1)(1 + g_2)(1 + g_3) = 10(1 + 0,1)(1 + 0,12)(1 - 0,05) = 10 \times 1,1 \times 1,12 \times 0,95 = 11,704$$

2) Augmentation en pourcentage suivie d'une diminution identique (ou diminution suivie d'une augmentation)

Lorsque l'on applique à une grandeur une augmentation d'un certain pourcentage, par exemple 10%, et qu'ensuite on applique au résultat un pourcentage identique de diminution, par exemple 10%, on ne retrouve pas le chiffre de départ.

Exemple : si l'on part de $V_0=10$ et que l'on applique une augmentation de 10%, on obtient $V_1 = 11$. Si l'on applique une diminution de 10% à V_1 , on obtient $V_2=11 \times (1-0,1)=11 \times 0,9 = 9,9$, parce que 10% de 11 = 1,1 alors que 10% de 10 =1. On ajoute donc 1 à 10, puis on retranche 1,1 à 11. On se retrouve donc avec 9,9.

De même, si on applique à une grandeur une diminution d'un certain pourcentage, par exemple 10%, et qu'ensuite on applique au résultat un pourcentage identique d'augmentation, par exemple 10%, on ne retrouve pas le chiffre de départ.

Exemple : si l'on part de $V_0=10$ et que l'on applique une diminution de 10%, on obtient $V_1 = 9$. Si l'on applique une augmentation de 10% à V_1 , on obtient $V_2=9(1+0,1)=9 \times 1,1 = 9,9$.

3) Temps de doublement d'une grandeur

Le temps de doublement d'une grandeur qui croît à un taux moyen constant se calcule en appliquant la formule :

$$2V_0 = V_0 (1 + g)^t$$

Exemple : En combien de temps un capital placé à 5% l'an double-t-il ?

On a la formule :

$$2V_0 = V_0 (1 + 0,05)^t \Leftrightarrow 2 = 1,05^t \Leftrightarrow \ln 2 = t \ln 1,05 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} = \frac{0,6931472}{0,0487902} = 14,206$$

Il faut donc 14 ans plus $0,2 \times 12$ mois = 2,4 mois pour qu'un capital placé à 5% l'an double. C'est-à-dire 14 ans, 2 mois et $0,4 \times 30$ jours = 12 jours. Soit 14 ans, 2 mois et 12 jours.

3 – Résumé

Les **indices** et les **taux de croissance** permettent d'étudier l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs dans le temps. Ils sont aussi utilisés pour comparer des situations (généralement deux séries dont les valeurs changent selon le lieu).

Un **nombre indice** est une mesure de la variation d'une grandeur comparée à une valeur de référence appelée « base ».

Un **indice élémentaire** est un indice qui renseigne sur l'évolution temporelle ou situationnelle (spatiale) d'une seule valeur.

Un **indice synthétique** est un indice qui résume l'évolution de plusieurs grandeurs : plusieurs prix, plusieurs quantités, plusieurs valeurs (prix x quantités), etc.

L'**indice de LASPEYRES d'évolution des prix** mesure l'évolution, entre deux dates 0 et t, des prix des biens qui composent un panier, en prenant comme référence la valeur du panier à la date initiale ($t = 0$) et en supposant que les quantités de biens dans le panier n'ont pas varié entre 0 et t.

L'**indice de LASPEYRES d'évolution des quantités** mesure l'évolution, entre deux dates 0 et t, des quantités des biens qui composent un panier, en prenant comme référence la valeur du panier à la date initiale ($t=0$) et en supposant que les prix des biens dans le panier n'ont pas varié entre 0 et t.

L'un des indices synthétiques les plus connus et les plus utilisés est l'**indice des prix à la consommation (IPC) publié chaque mois par l'INSEE**. L'IPC permet de mesurer l'inflation, c'est-à-dire la variation du niveau général des prix des biens et des services consommés par les ménages sur le territoire français entre deux périodes données. C'est une mesure synthétique des évolutions de prix à qualité constante.

Le **taux de croissance** sur une période de la valeur V entre $t = 0$ (date du début de la période) et $t = 1$ (date de fin de la période) s'écrit :

$$g_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Le taux g_1 s'exprime fréquemment en pourcentages. Dans ce cas on le multiplie par 100.

La formule du **taux de croissance moyen** sur plusieurs périodes est donnée par l'expression :

$$g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

où g = taux de croissance moyen, V_0 = grandeur à la date 0, V_t = grandeur à la date t et le t qui figure dans l'exposant $1/t$ est le nombre de périodes sur lequel le taux moyen est calculé.

Annexe : Démonstration de la formule directe du taux de croissance moyen

La formule du taux de croissance moyen sur plusieurs périodes est donnée par l'expression :

$$g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

où g = taux de croissance moyen, V_0 = grandeur à la date 0, V_t = grandeur à la date t et le t qui figure dans l'exposant $1/t$ est le nombre de périodes sur lequel le taux moyen est calculé. Pour voir comment on obtient cette formule, on va supposer que le taux moyen g se substitue au taux de croissance de chaque période $g_1, g_2, \dots, g_t$ dans la formule du taux de croissance sur une seule période. Autrement dit, supposons que $g = g_1, g_2, \dots, g_t$. Dans ce cas :

$$g = g_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Pour la première période. Cette expression peut s'écrire :

$$V_1 = V_0 (1 + g)$$

Pour la période 2, on aura de même :

$$V_2 = V_1 (1 + g)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$V_2 = V_1 (1 + g) = V_0 (1 + g)^2$$

Et ainsi de suite pour les autres périodes jusqu'à la période t pour laquelle on aura :

$$V_t = V_0 (1 + g)^t$$

Donc, en reformulant cette expression :

$$V_t = V_0 (1 + g)^t \Leftrightarrow \frac{V_t}{V_0} = (1 + g)^t \Leftrightarrow g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Le taux de croissance moyen g peut aussi s'écrire :

$$g = \left[(1 + g_t)(1 + g_{t-1}) \dots (1 + g_2)(1 + g_1) \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Le taux de croissance moyen g peut aussi s'écrire sous forme d'une moyenne géométrique des taux de croissance de chaque période $g_1, g_2, g_3, \dots, g_t$. En effet, on a :

$$g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1 = \left[\frac{V_t}{V_{t-1}} \times \frac{V_{t-1}}{V_{t-2}} \dots \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_1}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Or :

$$\frac{V_t}{V_{t-1}} = 1 + g_t$$

.....

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + g_2$$

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 + g_1$$

Donc, en remplaçant :

$$g = \left[(1 + g_t)(1 + g_{t-1}) \dots (1 + g_2)(1 + g_1) \right]^{\frac{1}{t}} - 1 = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Il y a donc deux façons équivalentes de calculer le **taux de croissance moyen**

- **La formule directe**, en passant par l'accroissement global de V_0 à V_t :

$$g = \left[\frac{V_t}{V_0} \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

- **La formule indirecte**, en passant par les accroissements successifs de V_0 à V_1 , de V_1 à V_2 , jusqu'à V_t :

$$g = \left[(1 + g_t)(1 + g_{t-1}) \dots (1 + g_2)(1 + g_1) \right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Cette formule est celle de la **moyenne géométrique simple** d'une série définie par les termes $\{(1+g_1), (1+g_2), (1+g_3), \dots, (1+g_t)\}$:

$$\left[\prod_{j=1}^t (1 + g_j) \right]^{\frac{1}{t}}$$