

XIV. L'IRRÉVERSIBILITÉ.

À cause de l'abondance de la littérature sur le sujet, ce chapitre comporte une bibliographie séparée, placée à la fin de l'annexe, page 458. Les chiffres entre crochets, par exemple [9], réfèrent à cette bibliographie.

1. Introduction.

Le problème de l'irréversibilité est celui de l'évolution des systèmes *macroscopiques*, c'est-à-dire constitués d'un nombre immense de molécules en perpétuelle agitation. L'exemple typique est le gaz ; mais n'importe quel objet matériel dont la masse est de l'ordre du gramme ou plus, est un tel corps, puisque les molécules qui le composent, même si elles sont très grosses, ont des masses infinitésimales si on les compare au gramme. Nous avons déjà abordé l'étude probabiliste de tels corps, notamment en **II.6** (problème du corps noir). L'irréversibilité est le fait que par exemple un gaz enfermé au départ dans un récipient va se répandre dans l'espace si on ouvre le récipient, alors qu'il n'arrivera jamais que du gaz répandu dans l'espace se rétracte jusqu'à revenir de lui-même s'enfermer dans un récipient. L'irréversibilité est à la base de tous les phénomènes naturels : les cadavres se décomposent et ne redeviennent jamais vivants, les vieux tuyaux rouillés ne redeviennent jamais neufs, des livres brûlent et partent en fumée mais les cendres et la fumée ne redonneront plus jamais les livres, etc. etc.

Le présent chapitre est consacré aux fondements probabilistes de l'irréversibilité. Nous avons déjà vu au chapitre **I** comment le chaos déterministe crée du hasard ; au chapitre **IV** comment il efface la causalité ; au chapitre **VII** comment le hasard se transforme en déterminisme. Ici il s'agit de comprendre comment le chaos déterministe, dont l'évolution est en principe réversible, efface la réversibilité. Cela implique que nous ne discuterons pas les fondements quantiques de l'irréversibilité, car cela sortirait du cadre du présent ouvrage (consulter le *Cours de Physique de Berkeley*, tome 5, Physique statistique). Pour comprendre il nous faut des modèles simples et la Mécanique classique y pourvoit ; le principe de base de l'*effacement de la réversibilité* est essentiellement le même en quantique qu'en classique ; le premier est juste techniquement plus difficile.

Les corps macroscopiques se modifient spontanément du fait de l'agitation perpétuelle des molécules qui les composent. Toutefois les objets *isolés*, c'est-à-dire écartés de tout contact ou échange avec le reste de l'univers, y compris

l'émission ou l'absorption de rayonnement, évoluent vers un état asymptotique stable, appelé *état d'équilibre*. Le simple sens commun suffit à le comprendre : si un corps métallique est maintenu à l'écart de tout échange, il ne pourra s'oxyder puisqu'il faut pour cela une action de l'oxygène sur le corps. De même un liquide au repos dans un réservoir ne se mettra à couler que si on bascule ou perce le réservoir, l'air calme ne peut commencer à être agité par le vent que s'il est exposé à des masses d'air plus chaudes ou plus froides, etc. Si au lieu de mettre le corps métallique fraîchement poli à l'abri de l'oxygène et du monde extérieur, on isole ce corps *avec une certaine quantité d'oxygène* de tout le reste, il va s'oxyder progressivement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus assez d'oxygène pour que la corrosion se poursuive, et on atteint aussi un état d'équilibre. Pour le sens commun, forgé par l'expérience quotidienne, il est bien évident qu'une fois la surface métallique corrodée, il n'arrivera plus jamais que l'oxygène se retire spontanément du métal pour retrouver sa forme gazeuse, en rendant ainsi tout son brillant à la surface métallique. C'est pourquoi on dit que la corrosion est une évolution *irréversible*. Bien entendu, il est possible d'appliquer au métal un traitement chimique qui sépare à nouveau l'oxygène et le métal, mais cela brise alors l'isolement du système *corps métallique plus oxygène*.

Cette notion d'*état asymptotique stable* est essentielle pour comprendre l'irréversibilité. Plus précisément, ce qui est essentiel est que ces "états stables" ne sont stables que dans leur apparence macroscopique ; l'état exact du mouvement des molécules, lui, n'est évidemment pas stable puisque l'agitation moléculaire ne s'arrête pas. Il s'agit d'une stabilité de *l'apparence macroscopique* qui est maintenue par le mouvement incessant des molécules. Pour clarifier la question on introduira un langage précis : l'état exact du mouvement des molécules sera appelé l'état *microscopique* du système, tandis que l'ensemble des paramètres caractérisant l'apparence macroscopique du système sera son état *macroscopique*. L'état asymptotique stable, ou état d'équilibre, est donc un état *macroscopique* du système. Les états microscopiques du système à l'équilibre sont évidemment instables et en perpétuelle transformation. Ceci sera examiné en détail à la section 4.

À la suite des travaux de Sadi Carnot (*Réflexions sur la puissance motrice du feu*, 1824) Rudolph Clausius a dégagé le concept de l'*entropie* d'un tel système isolé. L'entropie est une grandeur associée à l'état macroscopique du système ; en langage mathématique on dirait que c'est une fonction de l'état macroscopique, à valeurs réelles. L'entropie permet d'exprimer l'irréversibilité des systèmes macroscopiques sous une forme quantitative : c'est le *second principe de la Thermodynamique*, qui affirme que l'entropie d'un système isolé ne peut jamais diminuer. Carnot analysait le principe des

machines thermiques, qui produisent du mouvement à partir de la chaleur, en injectant de la vapeur ou de l'air sous pression dans un cylindre pour déplacer un piston. Il a constaté que la vapeur devait nécessairement se refroidir, et qu'avec une quantité de charbon donnée, l'énergie mécanique qu'on peut récupérer est d'autant plus élevée que la vapeur a plus refroidi. Plus précisément il établit la loi quantitative suivante : Si T_1 est la température (absolue, en degrés Kelvin) à laquelle on a chauffé la vapeur et T_0 la température à laquelle se refroidit cette vapeur après le passage dans le cylindre ou la turbine, l'énergie mécanique obtenue pour une quantité de chaleur fournie Q sera proportionnelle à $(1 - T_0/T_1) \times Q$ et non à Q seul. Cela veut dire que si par exemple on chauffe de l'air à 273 degrés Celsius (546 Kelvin) dans un cylindre pour qu'il pousse un piston et déplace ainsi un objet lourd, puis qu'on le refroidit à 0 degrés Celsius (273 Kelvin) pour que le piston se rétracte, le rapport $1 - T_0/T_1$ sera 0.5 et le travail mécanique de déplacement de l'objet lourd aura été la moitié de l'énergie calorifique dépensée pour chauffer l'air dans le cylindre. L'autre moitié se sera perdue dans le refroidissement de l'air. (N. B. cette perte par refroidissement est nécessaire, car sinon le piston ne se rétracte pas tout seul; il faudrait le pousser et donc perdre le travail mécanique qu'on vient de gagner).

Le processus *inverse* de celui de la machine thermique consisterait à produire la chaleur à partir du mouvement mécanique au lieu de l'obtenir en brûlant du charbon. On peut produire de la chaleur à partir du mouvement par frottement; on peut même convertir entièrement l'énergie mécanique en chaleur : dans ce cas le mouvement est complètement arrêté par l'effet des frottements. Or la loi de Carnot montre que, sauf si $T_0 = 0$ ou $T_1 = \infty$, la chaleur ne peut jamais être entièrement convertie en mouvement. De toute façon la condition $T_0 = 0$ est irréalisable, car pour que la vapeur puisse être refroidie à $T_0 = 0$ il faut maintenir un système de refroidissement bien plus coûteux que l'énergie produite par la machine. Ce constat fait par Carnot marque l'origine du problème théorique de l'irréversibilité : la transformation d'énergie mécanique en chaleur par les frottements n'est pas réversible, en ce sens qu'aucune machine thermique ne pourra retransformer intégralement la chaleur en le mouvement. La théorie (la Thermodynamique) interprète cela en disant que la transformation d'énergie mécanique en chaleur par les frottements augmente l'entropie; pour retransformer toute la chaleur en énergie mécanique il faudrait alors diminuer l'entropie. Quantitativement, si nous reprenons l'exemple ci-dessus avec la vapeur refroidie de 273 degrés Celsius à 0 degrés Celsius, on peut dire que 4184 joules de travail mécanique permettent d'échauffer par frottement 1 kilogramme d'eau de 1 degré, mais inversement, avec une machine thermique fonctionnant entre 273 et 0 degrés Celsius, cette même quantité de chaleur ne permettrait de récupérer que

2092 joules de travail mécanique. Bien entendu dans une machine réelle une grande partie de la chaleur fournie se perd aussi par les défauts d'isolation, en sorte qu'on récupérerait encore bien moins que ces 2092 joules ; la loi de Carnot concerne le cas idéal où on aurait entièrement éliminé ces pertes. Elle dit que même si ces pertes sont rendues infinitésimales, il restera toujours une irréversibilité de principe, car le fonctionnement même de la machine exige qu'une partie de la chaleur soit perdue par le refroidissement.

L'explication fondamentale du comportement des corps macroscopiques tels que la dilatation des gaz chauffés dans les machines thermiques, mais aussi l'écoulement des liquides, l'évaporation, la fusion ou la solidification, les échanges de chaleur, etc, a été trouvée dans le comportement *aléatoire* des mouvements moléculaires. C'est en appliquant la *loi des grands nombres* au mouvement chaotique d'un nombre immense de molécules qu'on retrouve le comportement des corps macroscopiques. La loi de Carnot mentionnée plus haut peut être déduite ainsi, de même que toutes les lois gouvernant les échanges de chaleur, l'agitation des fluides, etc. Quoique cette explication statistique ait déjà été proposée comme hypothèse par Daniel Bernoulli (*Hydrodynamica*, 1731), elle n'a commencé à devenir pleinement opératoire que dans la seconde moitié du *XIX*^e siècle. Les travaux fondateurs de cette *Mécanique statistique* ont été effectués pour l'essentiel par J. C. Maxwell ([2], 1860) et Ludwig Boltzmann ([1], 1872). L'irréversibilité mentionnée précédemment n'est qu'un aspect du comportement des corps macroscopiques, et au fond, elle ne joue qu'un rôle très marginal dans les préoccupations des physiciens car elle ne vaut que comme principe général et abstrait. Pour celui qui doit *calculer* ou décrire des phénomènes précis et particuliers, la *Mécanique statistique* est une science très technique dont le quotidien est bien éloigné des grands principes. Par contre, l'irréversibilité est le genre de problème qui a toujours fasciné les philosophes, ainsi que tous les amateurs passionnés de science, qui connaissent cette dernière bien plus par les ouvrages de vulgarisation que par l'étude approfondie et patiente de problèmes concrets mais ardu. De ce fait, le thème de l'irréversibilité inspire depuis Boltzmann toute une littérature pseudo- ou para-scientifique, pleine de confusion, de rêve, et de visions inexactes ou même carrément fausses.

Le point crucial de cette littérature est le *paradoxe de Loschmidt*. Après la publication par Ludwig Boltzmann de l'*interprétation moléculaire de l'entropie* ([1], 1872), quoique ce travail n'ait pas eu immédiatement un grand écho (probablement parce qu'il était mathématiquement très ardu), d'autres publièrent des critiques. Il s'agissait là d'une tradition de la Physique allemande, encouragée par les éditeurs des revues savantes : loin d'être polémiques ou liées à des rivalités, ces critiques favorisaient la

discussion et l'approfondissement des idées [des polémiques, il y en eut aussi, car l'hypothèse moléculaire avait des adversaires]. Parmi celles faites à Boltzmann, deux sont devenues célèbres.

Le premier article [3] de ce type fut publié en 1876 par Joseph Loschmidt et contenait une vingtaine de critiques ou d'objections exigeant de la part de Boltzmann des explications plus détaillées; une seule de ces critiques est entrée dans l'Histoire sous le nom de *paradoxe de Loschmidt*; il s'agit du fait apparemment paradoxal que le système dynamique ait globalement un comportement irréversible alors que la Mécanique est entièrement réversible: pour tout mouvement d'un système de points matériels tels que les molécules, le mouvement inverse, c'est-à-dire celui qu'on verrait dans un film projeté en marche arrière, est également possible et tout aussi probable. Boltzmann avait répondu ([12] et [13]) à la question de Loschmidt, et sa réponse est essentiellement correcte. Elle peut certes être affinée par des connaissances plus récentes, mais rien ne change *sur le fond*. Par exemple Boltzmann postulait pour les molécules un mouvement newtonien, alors que la Mécanique statistique moderne postule un mouvement quantique, ce qui induit de grandes différences (statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein). Mais l'argument de Loschmidt et la réponse de Boltzmann à cet argument ne s'en trouvent pas affectés de manière vraiment essentielle: les mouvements microscopiques quantiques sont, tout comme les classiques, parfaitement réversibles, et la propriété statistique universelle qui explique l'irréversibilité est la même. La réponse de Boltzmann repose sur l'observation suivante: les états initiaux du système qui feraient diminuer l'entropie existent, certes, mais sont si prodigieusement rares qu'il est pratiquement impossible de les rencontrer ou de les produire. Toutefois sous cette forme succincte l'argument laisse planer trop de malentendus [et c'est ce qui explique la persistance des incompréhensions]. C'est bien pourquoi il faut ce chapitre entier pour discuter la question.

Un second article [11] de ce type fut publié en 1896 par Ernst Zermelo et reprenait pour la communauté de langue allemande des critiques de Henri Poincaré. L'argumentation de Poincaré est basée sur son *théorème du retour*: “un système dynamique de N points matériels qui évolue au cours du temps en restant borné repassera au bout d'un temps fini aussi près qu'on voudra de son état initial”. Autrement dit, “pour tout ε , il existe un temps T_ε au bout duquel le système repassera à une distance inférieure à ε de son état initial.”

L'argument de Zermelo repose sur ce théorème: si on part d'un état de faible entropie et que cette entropie croît comme le dit le second principe de la Thermodynamique, alors elle devra forcément décroître à nouveau pour

revenir au bout d'un temps T_ε près de sa valeur initiale. On trouvera dans les sections **5** et **6** de l'annexe quelques textes de Poincaré et des extraits de la réponse de Boltzmann.

L'explication de cet apparent paradoxe est plus simple que pour celui de Loschmidt : le théorème de Poincaré est juste ; mais le temps T_ε au bout duquel le système repassera près de son état initial et où par conséquent l'entropie diminuera à nouveau est de l'ordre de 10^N pour un système de N particules. Si N est le nombre de molécules d'un litre de gaz $\simeq$ nombre d'Avogadro $\simeq 10^{23}$, cela veut dire que T_ε serait de l'ordre de $10^{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années. La loi de croissance de l'entropie n'est vraie que pour des durées *pratiques* et ne doit pas être extrapolée ainsi à des durées dépourvues de sens physique. C'est ce que Boltzmann répondit à Zermelo (voir annexe, section **6**).

2. La nature microscopique des gaz.

Imaginons un gaz maintenu dans un récipient hermétique comme un nuage de poussières dont les grains sont les molécules. On va considérer un mouvement parfaitement newtonien pour le système de point matériels auquel on assimile l'ensemble des molécules du gaz. Les substitutions fréquentes des vitesses, chaque fois que la molécule frappe une paroi du récipient ou entre en collision avec une autre, crée un *brouillage* qui, au bout d'un certain temps (après plusieurs collisions) rend la distribution des molécules en apparence complètement aléatoire ; c'est ce qu'on appelle le *chaos déterministe*. L'analyse mathématique détaillée de ce mouvement de points qui entrent mutuellement en collision, incluant le calcul de l'évolution des positions et des vitesses a été effectué pour la première fois en 1860, par J. C. Maxwell [2]. Ce texte de Maxwell est aujourd'hui encore l'exposé le plus clair, le plus rigoureux (malgré un raisonnement faux devenu célèbre, et corrigé six ans plus tard), et le plus pénétrant jamais écrit sur le sujet.

Nous avons déjà rencontré cette notion de brouillage en **I.5**, **II.5**, **IV.2**. Elle est essentielle pour la résolution du paradoxe de Loschmidt. En effet, le mouvement exact des molécules, c'est-à-dire leur mouvement newtonien mathématique, est réversible : en retournant toutes les vitesses (mais en conservant les positions), le système revient en arrière, en décrivant le mouvement exactement inverse de celui suivi jusque là ; de sorte que, si le système était dans une configuration X à l'instant 0, qu'on le laisse évoluer jusqu'à l'instant T où l'on inverse toutes les vitesses, il reviendra en parcourant dans l'ordre inverse toutes les positions précédentes, et se retrouvera à l'instant $2T$ dans la configuration X inversée. Pour exprimer cela de manière précise il faut un vocabulaire précis. Ce qu'on entend par

configuration est en fait la *configuration en phase*: c'est la donnée des positions *et des vitesses* de toutes les molécules. Cette donnée caractérise l'état *microscopique* du système; en fait l'état microscopique à un instant donné *est* la configuration en phase. Inverser la *configuration en phase*, c'est simplement retourner les vitesses (sans modifier les positions). Le système revient alors en arrière en retrouvant dans l'ordre inverse les positions antérieures, mais avec des vitesses opposées.

Dans ces conditions, comment se fait-il que l'on observe l'irréversibilité? C'est justement la question posée par Joseph Loschmidt. Si on prend un gaz, initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) comprimé dans un vase, il va se répandre tout autour et tendre à remplir tout l'espace disponible, mais on ne verra *jamais* un gaz répandu dans une grande pièce se comprimer progressivement et venir se concentrer dans un vase en faisant le vide alentour. Or, c'est bien ce qui devrait se produire si, une fois le gaz uniformément répandu dans la grande pièce, on inversait exactement la vitesse de chacune des $N \sim 10^{23}$ molécules qui le composent. Mais il faut inverser *exactement* les N vitesses. Si une seule de ces $N \sim 10^{23}$ vitesses est mal inversée, le mouvement de retour commencera effectivement comme l'inverse du mouvement précédent (c'est-à-dire que le gaz commencera à se recomprimer après l'inversion des vitesses), mais cela ne durera pas: l'unique vitesse mal inversée modifiera peu à peu (et en fait assez rapidement) les vitesses des autres molécules à cause des innombrables chocs, jusqu'à ce que la totalité du système soit brouillée (par le phénomène du chaos déterministe) et ne ressemble plus du tout au mouvement inverse. Même si l'unique vitesse mal inversée diffère très peu de l'inversion exacte, cela suffira à créer le chaos au bout d'un temps très court; si la différence entre la vitesse mal inversée et l'inverse exact est ε , et si le nombre de molécules est N , ce temps sera de l'ordre de $(1/\varepsilon)10^{-N}$. Il faudrait donc prendre $\varepsilon \sim 10^{-N}$ pour que ce temps soit de l'ordre de la seconde. Cela signifie que l'erreur dans le retournement de la vitesse devrait porter sur la N ième décimale. Si N est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit $N \sim 10^{23}$, on voit ce que cela signifie!

On voit apparaître ici une des raisons pour lesquelles la parfaite réversibilité du mouvement microscopique des molécules ne se reflète pas au niveau des apparences macroscopiques: c'est parce qu'il est *essentiellement* impossible d'inverser les vitesses avec une telle précision. Cependant cette raison n'est pas la seule. Une autre est qu'il est tout aussi essentiellement impossible d'inverser (même approximativement) les vitesses de toutes les N molécules; ce serait possible s'il n'y avait que cinq ou dix molécules, mais la difficulté qui intervient ici croît exponentiellement avec leur nombre.

Ces deux raisons ont en commun qu'elles ne sont pas liées à la nature physique du gaz, mais aux limites humaines. On pourrait en faire abstraction pour se concentrer sur l'objet (le gaz) en tant qu'existant indépendamment de l'homme et de ses limites. Par exemple en tenant un raisonnement comme celui-ci (déjà cité au chapitre **I**) :

“Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Pierre-Simon Laplace

Essai philosophique sur les probabilités (1819)

3. Un modèle simple

Pour comprendre exactement le mécanisme probabiliste qui transforme la réversibilité des mouvements microscopiques en irréversibilité, le mieux est comme toujours de commencer par étudier un modèle simple, qui soit suffisamment analogue aux gaz pour avoir en commun avec ceux-ci la propriété qui fonde l'irréversibilité. Dans un échantillon macroscopique de gaz, il y a de l'ordre de 10^{23} molécules qui se déplacent en tous sens selon trois dimensions et entrent sans cesse en collision mutuelle. C'était du moins le modèle envisagé par James Maxwell en 1860. Contentons nous de deux dimensions et de 200 molécules qui, au lieu de se heurter entre elles, ne font que rebondir sur la paroi du récipient. Ce récipient sera (puisque nous sommes en deux dimensions) une courbe fermée ovale.

Un tel modèle, considérablement simplifié, peut-il avoir assez de ressemblance avec le gaz de Maxwell pour justifier son emploi ?

— La différence la plus flagrante semble être la disparité entre le nombre d'Avogadro ($\sim 10^{23}$) et 200. En fait ce sera la moins lourde de conséquences, car ici les molécules n'interagissent pas entre elles, mais seulement avec la cloison ; en sorte que si on en augmente le nombre, cela ne changera rien au mouvement des 200 premières. On peut donc se faire une idée juste de l'évolution de N particules en extrapolant ce qu'on voit advenir pour 200.

— Un défaut plus significatif est la disparition des collisions entre particules. Nous verrons cependant, en faisant fonctionner notre modèle (tout comme nous l'avons vu pour le modèle de roulette au chapitre **I** section **5**), que ce qui produit la *stochasticité* de l'évolution est le phénomène du chaos déterministe : des molécules qui au départ sont parfaitement ordonnées (en rang d'oignon) seront au bout d'un certain temps *en apparence*

complètement désordonnées et leur disposition semblera aléatoire. Or, supprimer les innombrables collisions mutuelles ne fait que ralentir ce brouillage par le chaos, mais ne le fait pas disparaître. Au contraire, l'avoir ralenti va le rendre plus visible, tout comme un film au ralenti rend plus visibles les détails fins d'un mouvement.

Ainsi ce second défaut est en réalité, pour la présente étude, une qualité! Il faut cependant garder à l'esprit que la disparition des collisions n'est sans conséquences *que pour la discussion de l'irréversibilité*: notre petit modèle permettra de comprendre la notion d'entropie, mais serait très mauvais, et même absolument insuffisant, pour illustrer le rôle des autres grandeurs thermodynamiques telles que la pression, la température, l'énergie, la densité. Les relations mathématiques entre ces grandeurs et l'entropie, qui sont l'essentiel de la Thermodynamique puisqu'elles en expriment les lois, disparaissent complètement dans notre modèle simpliste.

— La seule différence majeure et essentielle (pour ce qui concerne la présente discussion) entre les vraies molécules d'un gaz et les points matériels de notre modèle est que le vrai mouvement moléculaire est quantique et non classique. Mais ce défaut existait déjà dans les théories de Maxwell et Boltzmann. C'est pourquoi nous excluons ici la discussion sur la nature quantique de l'entropie ou les fondements quantiques de l'irréversibilité; cela mènerait beaucoup trop loin! Il s'agira essentiellement de comprendre l'origine du paradoxe de Loschmidt, formulé en 1876, entièrement dans le cadre de la Mécanique classique. Pour cela le petit modèle convient parfaitement. D'ailleurs le paradoxe de Loschmidt s'explique par un mécanisme stochastique qui intervient de la même façon dans le cas quantique.

— Enfin, les différences liées à la dimension sont sans conséquences.

Voici alors des simulations numériques. Les positions et vitesses des molécules sont représentées par des symboles tels que :

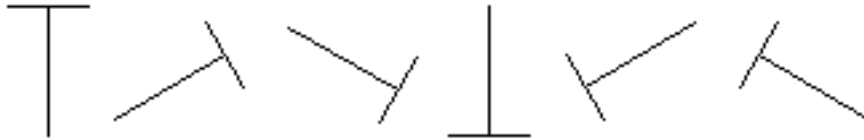


figure 64

de sorte que le pied du T pointe vers l'avant, le point d'intersection des deux segments du T représentant la position de la molécule et le pied du T le vecteur vitesse (ce vecteur reste constant en norme, les réflexions successives sur le bord du domaine ne modifiant que la direction du mouvement).

Au départ (instant $t = 0$) les molécules sont parfaitement alignées et équidistantes, comme ceci (les défauts de régularité qui apparaissent sont dûs aux arrondis) :



figure 65

mais peu à peu les rebondissements successifs sur la paroi vont avoir pour effet de *brouiller* cet ordonnancement jusqu'à aboutir à un aspect entièrement désordonné. La rapidité de cette évolution dépend de la forme du récipient. Dans les figures 66 *a* à 66 *j* ci-après on voit l'état du mouvement à différents instants de $t = 0$ (66 *a*) à $t = 2000$ (66 *j*), lorsque le domaine est une ellipse.

On constate qu'un certain ordre partiel subsiste jusqu'à l'instant $t = 50$ (66 *g*), et dans une moindre mesure à l'instant $t = 200$ (66 *h*). Cette appréciation de "l'ordre" reste pour le moment mal définie et subjective, mais si cet "ordre" subsiste pendant un temps aussi long, c'est parce que l'ellipse est une courbe très particulière: le mouvement d'une particule qui rebondit sur une ellipse est un *mouvement non chaotique* (le système dynamique correspondant à ce mouvement est intégrable). En attendant plus longtemps encore ($t \sim 1000$) on a à première vue une *apparence* de désordonné, mais en regardant de plus près on verrait que certaines régions sont moins fréquentées que d'autres. On voit déjà à l'oeil nu sur la figure 66 *j* qu'il y a moins de points dans les régions proches des extrémités droite et gauche de l'ellipse. C'est que la plupart des trajectoires ne passent pas par ces points; en effet, selon que le point initial est situé entre les deux foyers ou à l'extérieur des foyers, les trajectoires seront comme sur les deux figures que voici (fig 67) :

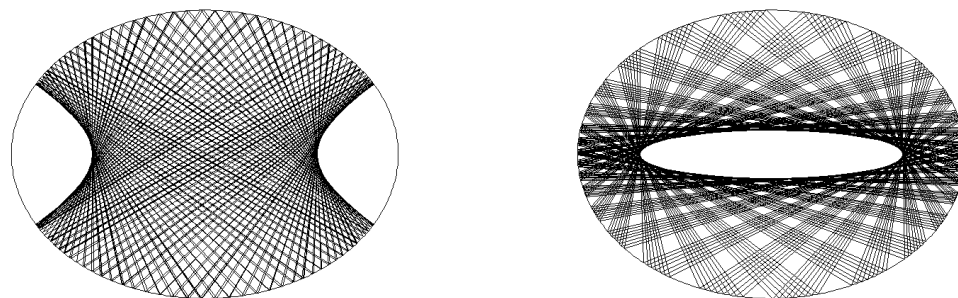


figure 67: trajectoires dans une ellipse.

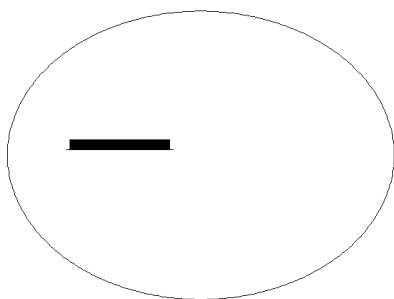


figure 66 *a* : $t = 0$.

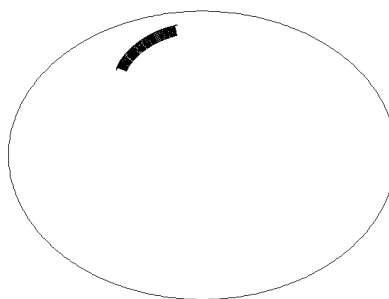


figure 66 *b* : $t = 0.25$.

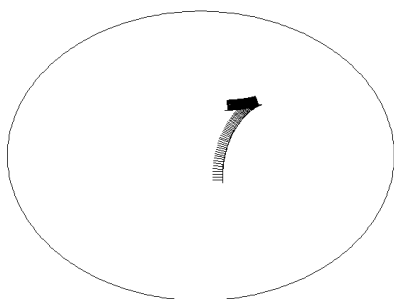


figure 66 *c* : $t = 1$.

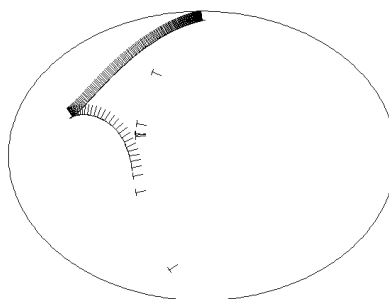


figure 66 *d* : $t = 3$.

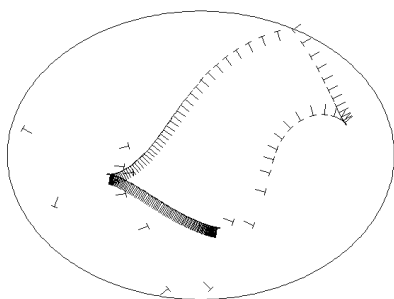


figure 66 *e* : $t = 8.00$.

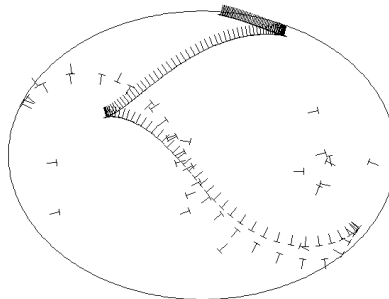


figure 66 *f* : $t = 16$.

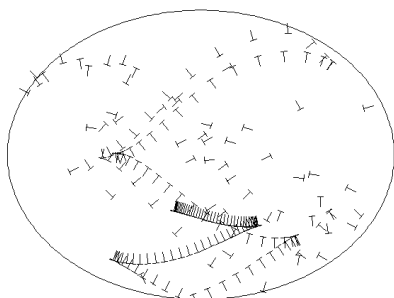


figure 66 *g* : $t = 50$.

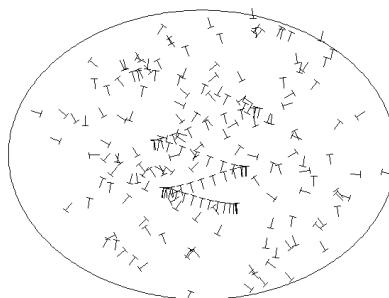


figure 66 *h* : $t = 200$.

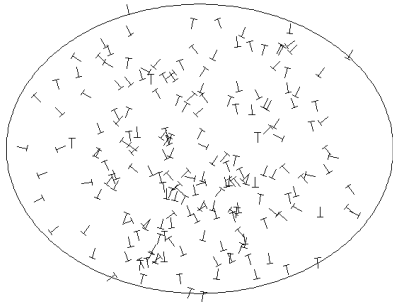


figure 66 i: $t = 1000$.

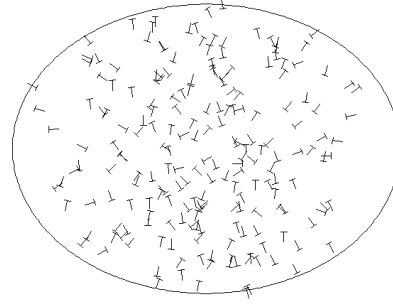


figure 66 j: $t = 2000$.

Or la majorité des points initiaux représentés sur la figure 66 a sont entre les deux foyers, en sorte que les trajectoires correspondantes sont comme sur la figure 67 à gauche.

Par conséquent, si on avait placé plus à gauche la rangée de points initiaux, en sorte que la majorité soit extérieure aux foyers, on verrait un vide dans la région centrale de l'ellipse.

Le phénomène illustré sur la figure 67 est semblable à ce qui se produit à l'intérieur d'un cercle et qui a été étudié en **I.5** (voir la figure 4).

Pour avoir une véritable évolution vers le désordre, et une similitude suffisante avec les gaz pour que le modèle discuté soit pertinent, il est essentiel d'avoir un système chaotique, qui garantit un brouillage suffisant. Pour cela, ni le cercle ni l'ellipse ne conviennent; par contre l'*ovale de Cassini* convient très bien. Si on fait la même chose avec cette courbe, on voit en effet que la disparition de l'ordre est bien plus rapide. La différence est d'ailleurs flagrante en comparant les trajectoires obtenues pour l'ellipse (fig 67) à la figure 68, dont le caractère chaotique saute aux yeux. L'évolution vers un désordre apparent est alors bien plus rapide dans l'ovale de Cassini que dans l'ellipse, comme on le voit en comparant les figures 69 a à 69 p (pages suivantes) avec les figures 66 a à 66 j relatives à l'ellipse.

Cette fois, grâce à la chaotité du mouvement, on arrive dès $t = 50$ à une distribution apparemment faite au hasard. On peut s'en rendre compte visuellement en comparant avec une troisième série de figures (70 a, 70 b, 70 c, et 70 d), qui ont été fabriquées à l'aide d'une fonction **random**.

Comme on sait, les fonctions **random** ne produisent pas un hasard plus authentique que celui des figures 69, puisqu'elles exploitent elles aussi la chaotité et sont en réalité absolument déterministes.

Toutefois le point crucial pour la discussion qui va suivre n'est pas la similitude de nature entre les fonctions **random** et les trajectoires

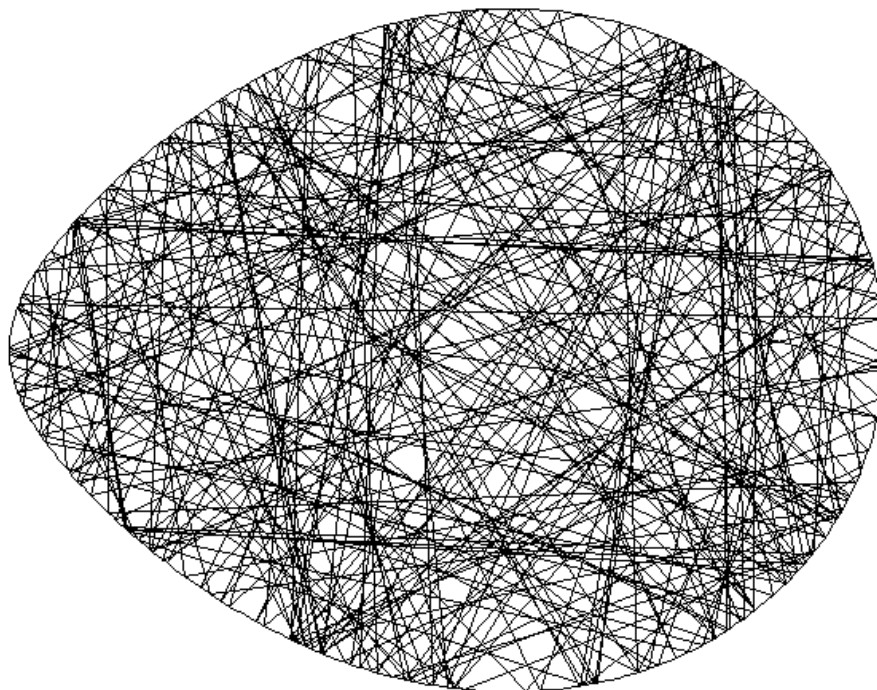


figure 68 : trajectoires dans l'ovoïde de Cassini.

chaotiques ; mais que l'aspect désordonné de la distribution des molécules est purement subjectif : la ressemblance entre la distribution des figures 69 *m*, 69 *n*, 69 *o*, ou 69 *p*, et celles des figures 70 *a*, 70 *b*, 70 *c*, 70 *d* n'est qu'une apparence due à la non perception du fait pourtant essentiel que voici : si dans la figure 69 *m* on retourne chacune des 200 molécules, c'est-à-dire si on inverse la vitesse sans toucher à la position, on obtient une configuration qui aura l'extraordinaire propriété qu'après un temps $t = 200$, elle aboutit à un parfait ordonnancement (le rang d'oignon initial, avec vitesses pointant vers le bas), ce qui ne sera certainement pas le cas pour les configurations 70 *a*, 70 *b*, 70 *c*, 70 *d*. Autrement dit, la configuration 69 *m* n'est absolument pas une distribution "au hasard", c'est au contraire une distribution tout à fait exceptionnelle. On s'en doutait, puisqu'elle est l'effet d'un mouvement rigoureusement déterministe. C'est ce caractère exceptionnel des configurations comme 69 *m* (ou sa conjuguée obtenue en inversant les vitesses) qui est la clé du paradoxe de Loschmidt ; mais pour en comprendre toutes les implications, il est indispensable de fixer un langage adéquat. Dans la section qui suit, on va donner un sens précis aux notions d'*état microscopique*, d'*état macroscopique*, et d'*entropie*, qui jusqu'ici n'avaient été qu'évoquées.

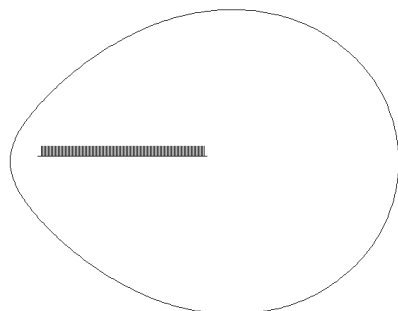


figure 69 *a*: $t = 0$.

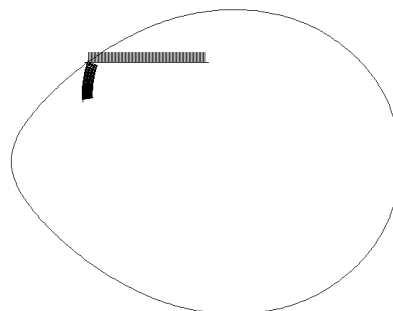


figure 69 *b*: $t = 0.16$.

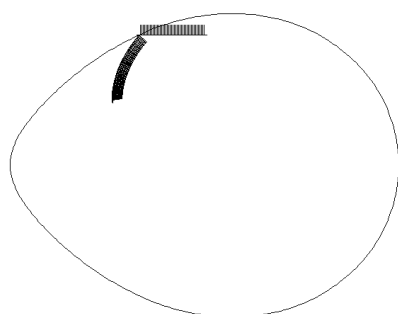


figure 69 *c*: $t = 0.21$.

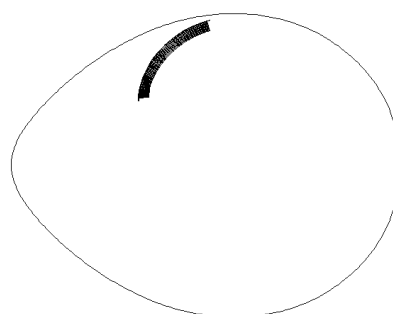


figure 69 *d*: $t = 0.25$.

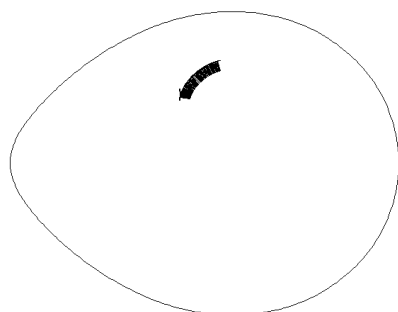


figure 69 *e*: $t = 0.32$.

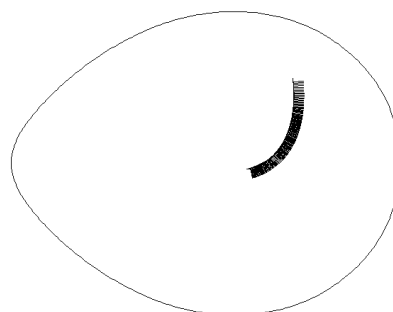


figure 69 *f*: $t = 0.50$.

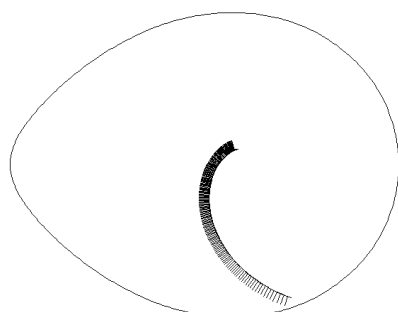


figure 69 *g*: $t = 1$.

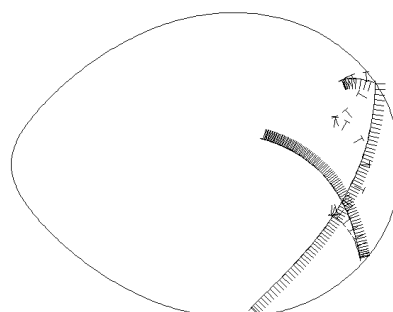


figure 69 *h*: $t = 2$.

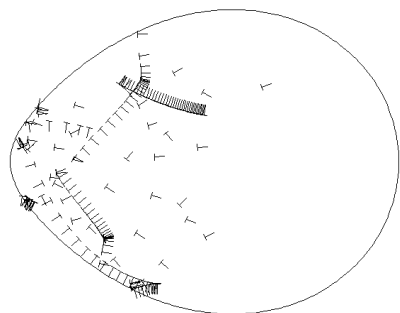


figure 69 *i*: $t = 3$.

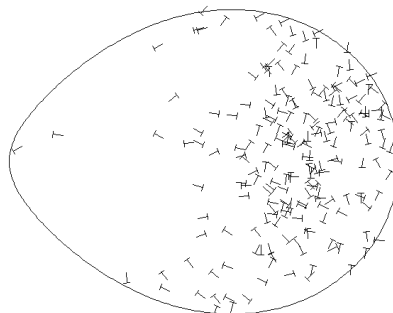


figure 69 *j*: $t = 8$.

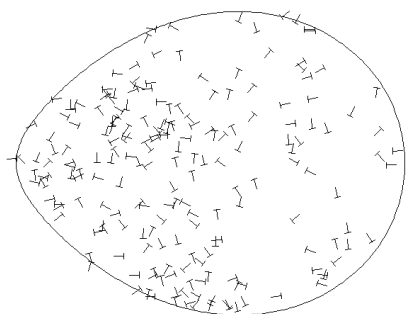


figure 69 *k*: $t = 16$.

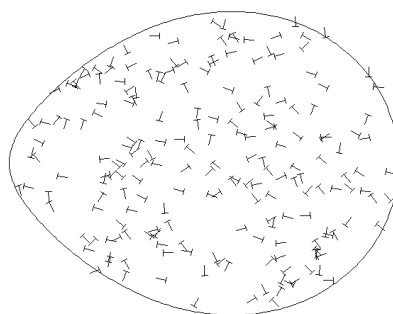


figure 69 *l*: $t = 50$.

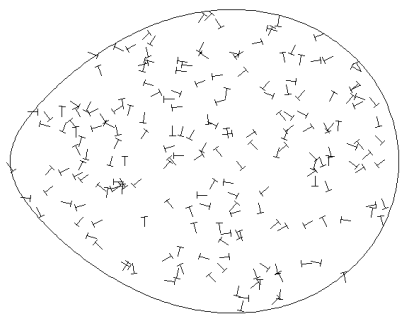


figure 69 *m*: $t = 200$.

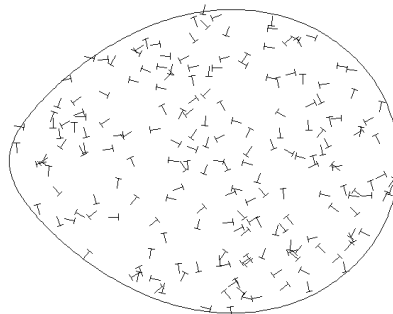


figure 69 *n*: $t = 900$.

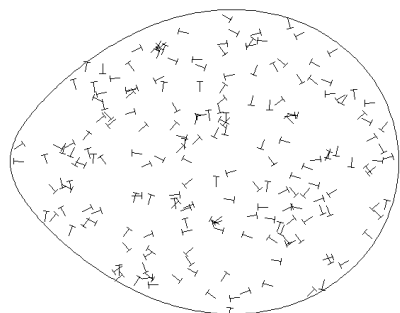


figure 69 *o*: $t = 2000$.

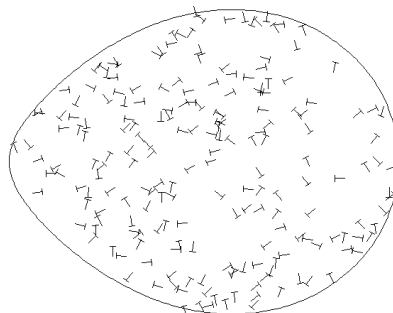


figure 69 *p*: $t = 2012$.

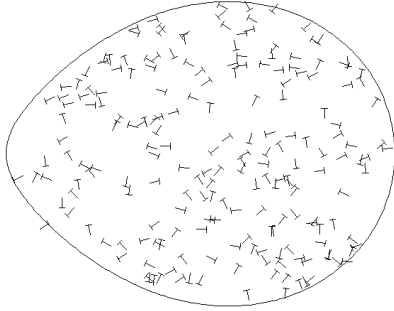


figure 70 a

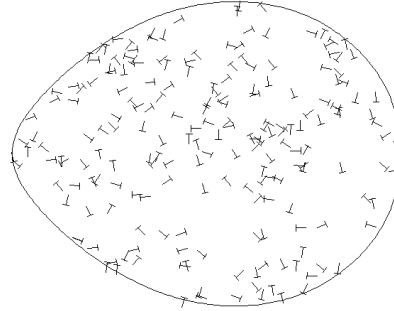


figure 70 b

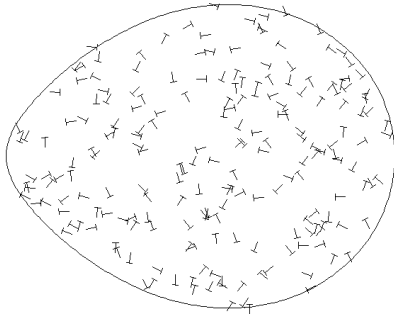


figure 70 c

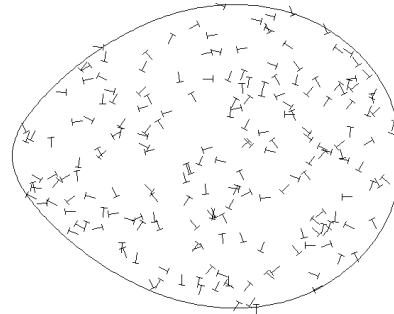


figure 70 d

figure 70 : configuration “au hasard”.

La position du point étant repérée par deux coordonnées x, y , et la direction par un angle θ , on a simplement pris $x = \mathbf{random}$, $y = \mathbf{random}$, $\theta = 2\pi \cdot \mathbf{random}$ (la fonction **random** retournant un flottant compris entre 0 et 1) et on n’a retenu que les points situés à l’intérieur de l’ovale.

4. Discussion du modèle.

On appellera *état microscopique* la donnée complète des positions et des vitesses de chacune des N molécules ; c’est la *configuration en phase* (les deux termes sont équivalents). Dans le petit modèle N est égal à 200, et il y a trois coordonnées pour chaque molécule (x, y , et θ) ; par conséquent un état microscopique est la donnée des $200 \times 3 = 600$ coordonnées correspondantes [En langage mathématique : c’est un élément de $(U \times [0, 2\pi])^{200}$, U étant le domaine bidimensionnel délimité par la courbe. Dans un vrai gaz $N \sim 10^{23}$, et il y a six coordonnées pour chacune (trois coordonnées de position dans l’espace, et les trois composantes du vecteur vitesse) ; un état microscopique est alors la donnée des $10^{23} \times 6$ coordonnées correspondantes. Pour pouvoir définir l’entropie, il est cependant nécessaire de *discrétiser* ces données, ce que nous allons faire dans le cadre du petit modèle. L’étendre au cas d’un vrai gaz ne changera conceptuellement rien.

Une remarque au passage: la discrétisation est consubstantielle à la notion d'entropie; cette dernière ne peut prendre aucun sens sur la base d'un continuum d'états. Dans la réalité c'est la nature quantique des états microscopiques qui veut qu'ils soient naturellement discrets, sans qu'il soit nécessaire d'introduire une *discrétisation* artificielle. Le pas d'une telle discrétisation artificielle est arbitraire (changer sa valeur ne fait qu'ajouter une constante conventionnelle à l'entropie); il faut seulement qu'il soit petit (mais pas trop). Dans le cas quantique par contre, il n'y a pas de telle convention: le nombre d'états microscopiques est ce qu'il est et l'entropie est alors une grandeur absolue et non une grandeur définie à une constante additive près.

Pour discrétiser le petit modèle on supposera le domaine intérieur à la courbe (le récipient) découpé en petites cellules carrées, en sorte que les coordonnées x, y sont arrondies à la cellule la plus proche. Les figures ayant été réalisées numériquement il est naturel de considérer les pixels comme étant les cellules. L'échelle de ces figures est de 880 pixels par unité de longueur, ce qui fait que l'aire délimitée par la courbe ovoïde contient exactement 177 883 pixels. Alors le nombre de valeurs possibles pour (x, y) sera 177 883. Il faut aussi discrétiser l'angle. On supposera que celui-ci est simplement arrondi au *degré*; cette discrétisation qui découpe l'espace en pixels et l'angle en degrés, revient à découper l'espace des phases en pixels $\times$ degrés, ce qu'on appelle des *cellules de phase*. Il y a en tout $Z = 360 \times 177\,883 = 64\,037\,880$ cellules de phase, en sorte que le nombre de possibilités de distribuer les 200 molécules sera $Z^{200} \simeq 1.94 \cdot 10^{1561}$. Autrement dit, il y a en tout environ $1.94 \cdot 10^{1561}$ états microscopiques possibles.

Un état *état macroscopique*, comme son nom l'indique, n'est défini que par des paramètres *macroscopiques*, donc indépendants de la connaissance détaillée des positions et vitesses des molécules. Par exemple l'information suivante:

$$\begin{array}{l} \text{"les molécules se répartissent uniformément} \\ \text{dans le récipient."} \end{array} \quad (1)$$

caractérise un état macroscopique; de même

$$\begin{array}{l} \text{"les molécules sont concentrées uniformément} \\ \text{sur le segment } AB \text{ de l'axe horizontal, avec la} \\ \text{même vitesse."} \end{array} \quad (2)$$

Plus généralement, étant donnée une région $\mathcal{R}$ du récipient,

“les molécules se répartissent uniformément dans la région $\mathcal{R}$, aucune ne se trouvant en dehors de cette région.” (3)

ou encore, étant donné un segment de courbe $\mathcal{S}$ contenu dans le récipient :

“les molécules se répartissent uniformément le long de $\mathcal{S}$, avec leurs vitesses dirigées selon la normale au segment.” (4)

Ces spécifications ne prennent pas en compte les coordonnées et vitesses *individuelles* de chaque molécule : elles ne décrivent que des situations collectives. C'est cela qu'on appelle un *état macroscopique*. Le point crucial de cette définition est la notion de paramètre collectif. Par exemple la spécification (4) ne fait appel qu'aux paramètres qui décrivent le segment de courbe. Si c'est un segment de parabole, on donnera son équation $y = ax^2 + bx + c$, et les deux abscisses extrêmes du segment, x_0 et x_1 , en sorte que le segment sera l'ensemble des points x, y tels que $y = ax^2 + bx + c$ et $x_0 < x < x_1$. Les cinq paramètres a, b, c, x_0, x_1 sont alors les paramètres *macroscopiques* qui définissent l'*état macroscopique*. Ces paramètres ne contiennent d'information sur les coordonnées ou la vitesse d'aucune molécule particulière. Le fait que la vitesse est le vecteur normal à la courbe ne donne pas de renseignement sur les vitesses individuelles des molécules car on ne sait pas laquelle des molécules est à la base d'une normale particulière. Toutefois il peut arriver que la spécification macroscopique fournisse ce renseignement : par exemple la position initiale des molécules dans les figures 66 *a* ou 69 *a* correspond à un état macroscopique, caractérisé par une spécification du type (2) ci-dessus. Il s'agit d'un état macroscopique très particulier, car toutes les molécules ont exactement le même vecteur vitesse. Celui-ci devient alors un paramètre macroscopique dont la connaissance fournit évidemment aussi la vitesse de chaque molécule individuelle. Mais pas sa position. De la même façon, si toutes les molécules étaient au même endroit, les coordonnées de cet endroit deviendraient des paramètres macroscopiques, mais pas les vitesses (à moins qu'elles ne soient toutes égales, elles aussi).

Un même état macroscopique peut en général être réalisé par un grand nombre de configurations en phase, c'est-à-dire d'états microscopiques différents. On le comprend rien qu'en remarquant qu'une permutation entre les molécules ne change pas l'état macroscopique : par exemple si on prend la spécification (3) ci-dessus, on voit qu'elle demeure respectée si on ne fait

qu'échanger les molécules entre elles. Par contre l'état microscopique n'est évidemment plus le même après permutation.

L'entropie d'un état macroscopique $\mathcal{E}$ du système est alors définie comme étant le logarithme du nombre d'états microscopiques qui réalisent l'état macroscopique $\mathcal{E}$. Voyons cela sur les exemples (1), (2), (3), (4).

(1). Dans l'état (1), les molécules se répartissent uniformément sur l'ensemble du domaine ovoïde. Cela veut dire que la distance entre deux molécules voisines ne peut pas être trop petite, elle doit être du même ordre que la maille d'un quadrillage régulier de 200 mailles recouvrant l'ovoïde. Si Q est l'aire d'une telle maille, comptée en prenant pour unité la taille d'un pixel, et G le nombre de pixels contenus dans l'ovoïde (ici $G = 177\,883$), on doit avoir $Q = G/200 \simeq 889.415$. N'importe quelle répartition à peu près uniforme des molécules sur la surface de l'ovoïde doit avoir la propriété que chacune de ces molécules est seule dans une maille dont l'aire est à peu près 889 pixels. Tout se passe donc en gros comme si on devait placer les 200 molécules dans deux cents mailles ayant chacune une aire égale à 889 ou 890 pixels, de manière à n'avoir qu'une seule molécule par maille. Le nombre de possibilités est $Q^{200} \times 200! = G^{200} \times 200!/200^{200} \simeq 5.22 \cdot 10^{964}$. Comme les vitesses sont indifférentes puisque seule la place des molécules est prise en compte, et qu'il y a 360 vitesses en tout pour *chaque* molécule, on voit que le nombre d'états microscopiques est

$$\nu_1 = [360 \times Q]^{200} \times 200! \simeq 0.95 \times 10^{1476}$$

dont le logarithme (népérien) est environ 3398.56.

(2). Pour simplifier supposons que la longueur du segment soit 200 pixels. Le nombre de possibilités de ranger les 200 molécules est alors $200!$. La vitesse est imposée pour chaque molécule, il n'y a donc pas d'autre possibilité, en sorte que

$$\nu_2 = 200!$$

dont l'entropie est environ 863.23. Le calcul de l'entropie pour le cas où la longueur du segment n'est pas 200 est laissé en exercice (indication : c'est un problème de dénombrement du type traité au chapitre **II**, section 4).

(3). On peut appliquer le raisonnement de (1) en remplaçant l'ovoïde par la région $\mathcal{R}$; si $G_{\mathcal{R}}$ est le nombre de pixels couverts par cette région on aura

$$\nu_3 = [360 \times G_{\mathcal{R}}/200]^{200} \times 200!$$

En désignant par σ le rapport $G_{\mathcal{R}}/G$ (qui est aussi l'aire de $\mathcal{R}$ en proportion de l'aire totale de l'ovoïde) on voit que $\nu_3 = \sigma^{200} \times \nu_1$ et l'entropie sera $3398.56 + 200 \ln \sigma$ ($\sigma < 1$ donc $\ln \sigma < 0$).

(4). La réponse est la même que pour (2) : le fait d’avoir une courbe au lieu d’une droite ne change combinatoirement rien.

On voit que l’entropie est bien la “mesure du désordre” comme on le dit dans la science populaire : les structures très ordonnées telles que (2) ou (4) ont une entropie bien plus petite que (1), tandis que (3) qui est un peu ordonné a une entropie un peu plus petite que (1). La structure la plus ordonnée possible est celle où toutes les molécules sont au même endroit avec la même vitesse ; comme on l’a signalé plus haut, cet endroit et cette vitesse uniques constituent les paramètres macroscopiques d’un tel état, et déterminent aussi les positions et vitesses individuelles de chaque molécule. Il n’y a que dans ce cas extrême que les paramètres macroscopiques déterminent les positions et vitesses individuelles de *chaque* molécule. Cela entraîne qu’il n’y a qu’un seul état microscopique sous-jacent possible, et par conséquent l’entropie de cet état macroscopique extrême est 0. Cela correspond à l’ordre maximal : on ne peut pas imaginer un état macroscopique plus ordonné que celui où la position et la vitesse de chaque molécule individuelle sont fixées.

C’est la notion d’état macroscopique, caractérisé par des paramètres macroscopiques, qui est la clé du paradoxe de Loschmidt. Ce paradoxe cesse de paraître paradoxal dès lors qu’on a compris ce qu’est un état macroscopique. Et pour bien comprendre ce qu’est un état macroscopique, le mieux est peut-être de voir ce qui *n’est pas* un état macroscopique. Je propose donc d’examiner la réversibilité microscopique en montrant qu’elle fait intervenir des états qui *ne sont pas* des états macroscopiques.

Considérons un système de molécules qui évolue d’un état $\mathcal{B}$ (relativement ordonné) vers un état $\mathcal{A}$ d’entropie maximale. L’argument de Loschmidt consistait à dire que, si on inverse le sens du temps, le système va revenir à l’état $\mathcal{B}$, donc pour chaque évolution qui fait croître l’entropie, il y en a une autre, symétrique, qui la fait décroître. Il y a donc “autant” d’évolutions microscopiques qui font croître l’entropie que d’évolutions microscopiques qui la font décroître et par conséquent on ne comprend plus pourquoi le premier cas est plus probable que le second (et encore moins pourquoi c’est *toujours* le premier cas qui se produit dans la nature).

Reprenons cet argument de Loschmidt dans le cadre de notre petit modèle. Supposons qu’à l’instant 0 on dispose les molécules dans l’état macroscopique de la figure 69 *a*, en rang d’oignon sur l’axe horizontal, les vitesses, toutes identiques, pointées vers le haut. Il s’agit d’un état macroscopique du type (2), que nous pouvons appeler l’état $\mathcal{B}$. Lorsque le système évolue, il se trouvera à l’instant $t = 200$ dans la configuration de la figure 69 *m*. Il s’agit d’une configuration en phase puisque les vitesses

sont marquées, donc cette figure représente un état microscopique : chaque molécule est représentée par un T qui indique sa position et son vecteur vitesse (il manque la numérotation des molécules, mais leur trajectoire permettrait de les identifier). L'état macroscopique qui correspond à la configuration de la figure 69 *m* est un état du type (1) (les molécules sont réparties au hasard, à peu près uniformément), qui a l'entropie maximale, et qu'on appellera donc l'état $\mathcal{A}$. Aux instants ultérieurs ($t > 200$) l'état macroscopique reste le même (figures 69 *n*, 69 *o*, et 69 *p*), mais évidemment l'état microscopique change à chaque instant. On a vu qu'il y avait $\nu_1 \simeq 10^{1476}$ états microscopiques différents qui donnent tous la même apparence macroscopique, celle de l'état $\mathcal{A}$. Lorsque le système continue d'évoluer après l'instant $t = 200$, il passe successivement par d'autres états microscopiques qui font tous partie de cet ensemble de ν_1 états microscopiques. Ce nombre ν_1 est énorme : au bout d'un temps t de l'ordre de un milliard, le système n'aura parcouru que quelques centaines de milliards d'états microscopiques, sur ν_1 en tout. Pour avoir une chance qu'il ait parcouru une proportion notable de ces ν_1 états microscopiques, il faudrait attendre que $t \sim 10^{1476}$. Et ici on considère un système de 200 molécules seulement ; avec 10^{23} ($\sim$ nombre d'Avogadro) molécules, le nombre ν_1 serait de l'ordre de $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$, et il faudrait donc attendre un temps du même ordre que ce nombre.

N'importe quel état macroscopique plus ordonné que $\mathcal{A}$ a une entropie plus faible, mais l'entropie n'étant que le logarithme du nombre d'états microscopiques sous-jacents, le nombre de ces états sera énormément plus faible. On a vu que l'entropie de $\mathcal{A}$ est environ 3398 ; un état $\mathcal{A}'$ d'entropie 3300 aura $e^{98} \simeq 10^{43}$ fois moins d'états microscopiques sous-jacents. On comprend donc pourquoi il est extrêmement peu probable que le système tombe précisément sur un de ces très rares états macroscopiques de plus faible entropie. C'est bien ce qu'on observe : si on laisse le programme qui simule l'évolution représentée sur les figures 69 *a* à 69 *p* tourner, on devra attendre vraiment très longtemps avant de voir apparaître "spontanément" un état macroscopique de plus faible entropie. Le temps qu'il faudra attendre sera évidemment inconcevablement plus long pour 10^{23} molécules que pour 200. Si on désigne par δ la durée moyenne d'un état microscopique, c'est-à-dire le temps pendant lequel le système reste dans une cellule de phase (δ est de l'ordre de 10^{-12} secondes pour un gaz, de 10^{-2} pour le petit modèle), alors on peut dire que le temps moyen au bout duquel se produira spontanément une baisse d'entropie de ΔS est en gros $T = \delta \times \exp\{\Delta S\}$. Après un temps petit devant T une diminution de ΔS est pratiquement impossible, mais au bout d'un temps qui serait grand devant T (ne serait-ce que $100 \times T$), une diminution d'entropie de ΔS devient par contre presque certaine. Il s'agit

évidemment du même phénomène que celui qui a été étudié à la section **V.4**. Le paradoxe de Loschmidt n'existerait pas si l'espérance de vie des humains était de l'ordre de $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$ années. Mais la loi de croissance de l'entropie serait alors fausse.

En revenant à l'inversion du temps, on arrive à la conclusion suivante : si on retourne en arrière, c'est-à-dire si à l'instant $t = 200$ on inverse brusquement toutes les vitesses dans la configuration de la figure 69 *m*, le système reviendra effectivement à la configuration de la figure 69 *a* (avec vitesses inversées) à $t = 400$. Mais ce que dit le second principe de la Thermodynamique, c'est justement qu'on ne peut pas effectuer une telle inversion *dans les systèmes physiques*. Aucun physicien ne peut en laboratoire produire une telle inversion. Pour réussir une telle expérience, il faudrait, après avoir laissé le système évoluer pendant un certain temps, retourner les vitesses de chaque molécule individuelle *sans rien perturber d'autre*. Il faudrait aussi que ce retournement soit extrêmement précis : la moindre erreur ferait qu'au retour on retrouverait une configuration entièrement différente de celle qui est attendue, c'est-à-dire la configuration initiale inversée. Il n'existe aucun moyen physique d'effectuer une telle inversion. En réalité, ce que dit le second principe de la Thermodynamique n'est pas tant que l'entropie est toujours croissante (ceci en est une formulation mathématique et abstraite) ; le sens concret de ce principe est :

Il est impossible d'effectuer, sur un système matériel, une inversion exacte des vitesses individuelles des molécules.

Essayons d'imaginer concrètement ce que serait une expérience de ce type, c'est-à-dire une expérience mettant en défaut le second principe. On voudrait préparer un système (par exemple un gaz) de manière que :

- a) L'état macroscopique immédiatement après la préparation est d'entropie maximale ;
- b) Si après la préparation on laisse évoluer le système à l'abri de toute influence extérieure, il évoluera vers un état macroscopique de moindre entropie.

Pour mieux comprendre revenons à notre petit modèle ; on voudrait qu'au départ la configuration soit analogue à celle de la figure 69 *m*, et qu'après évolution elle devienne analogue à celle de la figure 69 *a*. Pour que cela ait une chance de marcher il faut évidemment prendre les configurations avec les vitesses inversées. On voit aisément sur le petit modèle que la préparation doit obligatoirement consister à réaliser la configuration de la figure 69 *m* (avec vitesses inversées). Si on se trompe dans cette préparation, on ne retrouvera pas la configuration de la figure 69 *a* mais une autre, qui avec une

quasi certitude sera d'entropie maximale. Pour retrouver la configuration de 69 *a* (avec vitesses inversées) il faudra viser extrêmement juste.

Une petite remarque en passant : dans ce petit modèle, si on se trompe sur une seule des 200 vitesses, les 199 autres étant correctes, il n'y aura qu'une seule molécule qui ne reviendra pas sur sa position de la figure 69 *a*. Mais cela est uniquement dû au fait que ce modèle trop simpliste ne comporte pas de collision entre molécules : l'évolution de chaque molécule étant indépendante des autres, une erreur sur une seule molécule n'aura aucune conséquence sur les 199 autres. Dans un vrai gaz, les molécules entrent en collision des milliards de milliards de fois par seconde. Alors la moindre erreur sur une molécule se répercute rapidement sur l'évolution de toutes les autres. D'autre part le petit modèle est numérique et non physique : il est possible de créer *numériquement* un état initial qui évoluera en faisant diminuer l'entropie, il suffit pour cela de calculer d'abord l'évolution de 69 *a* vers 69 *m*, avec les valeurs des positions et des vitesses dans un tableau, puis d'effectuer numériquement l'inversion. Le second principe dit qu'il n'existe pas de procédure analogue pour un système physique.

Et voilà la solution du paradoxe de Loschmidt. Le nombre d'états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique de la figure 69 *m* est $\nu_1 \sim 10^{1476}$. Mais parmi ces ν_1 états microscopiques, il n'y en a que $\nu_2 = 200! \sim 10^{375}$ qui correspondent à la configuration précise de la figure 69 *m*, celle qui, après retournement, est en mesure de revenir à la configuration en rang d'oignons. Cela résulte de la symétrie par retournement du temps.

En effet, la symétrie par retournement du temps des équations de la Mécanique, qui est invoquée dans l'argument de Loschmidt, se traduit ainsi : à chaque état microscopique C_0 , correspond un *unique* état microscopique C_t qui est le résultat de l'évolution de C_0 après un temps t , et vice-versa. En termes mathématiques :

Théorème : *la transformation*

$$f : C_0 \mapsto C_t$$

est une bijection.

Démonstration : Il suffit de montrer que f possède un inverse f^{-1} . Or, si on appelle $\overline{C}$ l'état obtenu en inversant toutes les vitesses de l'état C , la symétrie par retournement du temps peut s'énoncer sous la forme suivante :

“Si C_t est le résultat de l'évolution mécanique de C_0 après le temps t , alors $\overline{C_0}$ est le résultat de l'évolution mécanique de $\overline{C_t}$ après le temps t .”

Traduit en langage mathématique cela se dit, en désignant par Q la transformation $C \mapsto \overline{C}$:

$$f^{-1} = Q \circ f \circ Q$$

c'est-à-dire que f a un inverse, qui est la composition

$$f^{-1} : C_t \mapsto \overline{C_t} \mapsto \overline{C_0} \mapsto C_0$$

C.Q.F.D.

C'est là la seule traduction logique de la symétrie par retournement du temps. Le fait que la transformation f soit inversible, donc bijective, entraîne évidemment que

le nombre d'états microscopiques distincts résultant de l'évolution pendant un temps donné d'un ensemble de n états microscopiques initiaux, est exactement égal à n .

ou, de manière équivalente en passant aux conjugués:

le nombre d'états microscopiques distincts qui, après évolution rétrograde pendant un temps donné, redonneront un ensemble de n états microscopiques initiaux, est exactement égal à n .

C'est donc la symétrie par retournement du temps qui permet de dire que

parmi les $\nu_1 \sim 10^{1476}$ états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique de la figure 69 m, il y en a exactement $\nu_2 = 200! \sim 10^{375}$ qui redonneront par retour la configuration en rang d'oignons initiale."

Résumons tout cela sous la forme d'un argument général, non lié au petit modèle: si on veut préparer un système qui au départ se trouve dans un état macroscopique $\mathcal{A}$ d'entropie maximale $S_{\mathcal{A}}$ afin qu'il évolue vers un état macroscopique $\mathcal{B}$ d'entropie $S_{\mathcal{B}} < S_{\mathcal{A}}$, il faut le préparer dans un état microscopique extrêmement particulier: parmi les $\nu_{\mathcal{A}} = \exp\{S_{\mathcal{A}}\}$ états microscopiques susceptibles de donner l'apparence macroscopique $\mathcal{A}$, il faut en réaliser un parmi ceux qui évolueront vers $\mathcal{B}$; d'après ce qu'on vient de voir, le nombre de ces états microscopiques est $\nu_{\mathcal{B}} = \exp\{S_{\mathcal{B}}\}$, puisqu'ils sont en bijection avec les états microscopiques qui produisent l'apparence $\mathcal{B}$.

Il en résulte que la proportion de ces états microscopiques exceptionnels parmi tous ceux qui produisent l'apparence macroscopique $\mathcal{A}$ est égale à $\nu_2/\nu_1 = \exp\{S_{\mathcal{B}} - S_{\mathcal{A}}\}$. Dans le cas du petit modèle et de l'évolution entre les figures 69 a et 69 m, cette proportion est $\nu_2/\nu_1 \simeq 10^{-590}$

C'est le problème de cette préparation qui est omis dans le raisonnement de Loschmidt. Le second principe de la Thermodynamique ne dit pas

qu'*aucun* des états microscopiques sous-jacents à un état macroscopique $\mathcal{A}$ ne peut conduire à un état macroscopique $\mathcal{B}$ de moindre entropie; il dit que :

a) de tels états microscopiques sont extrêmement peu nombreux (au regard de tous ceux qui fournissent l'apparence macroscopique de $\mathcal{A}$);

b) il est impossible d'en aménager un (par des manipulations sur le corps).

On peut préciser davantage en énonçant au lieu de b) :

c) il n'est possible de préparer que des états macroscopiques, sans contrôle aucun de l'état microscopique précis qui le réalisera.

La partie a) du principe est la conséquence rigoureuse de la symétrie par retournement du temps, comme on l'a vu ci-dessus. La partie b) ou c) est un fait empirique du même type que

“Il est impossible de réaliser un mouvement perpétuel”

dont on sait que c'est une formulation alternative de la conservation de l'énergie, ou que

“Tous les hommes sont mortels”

Bien sûr, dans le programme numérique qui calcule l'évolution des 200 molécules du petit modèle, il est possible de “préparer” n'importe quel état microscopique; si on donne aux variables les valeurs initiales correspondant à la configuration de la figure 69 *m*, avec les vitesses en sens opposé, et qu'on laisse le programme calculer, les 200 molécules viendront bien sagement se ranger en rang d'oignon après un temps $t = 200$. Mais il est impossible de réaliser une telle initialisation de manière *physique*, avec un gaz ou avec tout autre corps matériel. C'est cela que dit le second principe. Le second principe ne s'applique pas aux simulations numériques, car ces dernières permettent de contrôler les états microscopiques.

Prenons un exemple fréquemment invoqué dans les manuels de Physique, celui d'un gaz qui au départ est concentré dans la moitié gauche d'un réservoir (immédiatement après que l'expérimentateur ait retiré une cloison de séparation), et qui ensuite se répand dans la partie laissée vide. L'état macroscopique initial est extrêmement peu probable, en ce sens que, si on voulait attendre qu'il se produise spontanément par le seul fait du hasard, il faudrait attendre pendant un temps fantastique: la probabilité étant 2^{-N} (pour N molécules), ce temps serait de l'ordre de 2^N (si $N = 10^{23}$, $2^N \sim 10^{301\,030\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$) Si l'expérimentateur pouvait préparer un gaz dans l'un des états microscopiques exceptionnels où les molécules, quoique distribuées uniformément entre les deux moitiés du

réipient, le seraient de manière à évoluer vers l'état où toutes les molécules seront dans la moitié gauche du réipient, il obtiendrait évidemment une violation de la loi de croissance de l'entropie. Mais parmi tous les états pour lesquels la distribution est uniforme, il n'y en a qu'une proportion 2^{-N} qui soit un tel état exceptionnel. Ces états exceptionnels ne forment pas un état macroscopique, ou plus exactement celui qu'ils forment (la distribution uniforme) est réalisé *aussi* par d'autres états microscopique non exceptionnels, qui sont 2^N fois plus nombreux. L'expérimentateur ne peut pas, en agissant sur des paramètres macroscopiques (les seuls qui soient sous son contrôle), préparer le gaz dans un de ces états exceptionnels. C'est ce que dit la partie b) du second principe.

Ainsi, ce qui n'a pas été pris en compte dans le paradoxe de Loschmidt, et c'est justement cela qui crée le paradoxe, c'est que les états microscopiques susceptibles de conduire à une diminution d'entropie sont des états absolument exceptionnels. La symétrie de la Mécanique par rapport à l'inversion du temps, qui était à la base du raisonnement, existe bien. Mais elle s'applique de la manière suivante : puisque les états microscopiques susceptibles de conduire à une diminution d'entropie sont des états absolument exceptionnels, alors par inversion du temps on peut dire de manière équivalente que *les états microscopiques réalisés au cours de l'évolution mécanique à partir d'un état initial d'entropie non maximale sont aussi des états absolument exceptionnels*. Leur nombre reste, tout au long de l'évolution, constamment égal à $\exp\{S_B\}$ (B étant l'état macroscopique initial), mais leur apparence macroscopique change, et devient celle d'un état macroscopique qu'une infinité d'autres états microscopiques *non exceptionnels* réaliseraient tout aussi bien. Or, pour cette infinité d'autres états microscopiques, l'inversion du temps ne conduit pas du tout à une diminution de l'entropie.

Une fois admis l'énoncé b) ou c), qui interdit l'accès au contrôle microscopique des paramètres, il ne reste plus qu'une possibilité de réaliser un de ces états microscopiques exceptionnels qui évoluerait vers une entropie moindre : compter sur la chance. Puisqu'il n'y a aucun contrôle possible, on peut essayer de réaliser un grand nombre de fois un état macroscopique d'entropie maximale, en espérant qu'une fois, par hasard, ce soit un "bon" état microscopique qui le sous-tende. Mais l'énormité des nombres tels que ν_1 rend cette entreprise absolument utopique. On a vu plus haut, dans le cadre du petit modèle, qu'il faudrait réaliser $10^{1476}/10^{375} = 10^{1101}$ fois un état macroscopique d'entropie maximale pour avoir une chance de le voir sous-tendu par un "bon" état microscopique. Pour un corps formé de 10^{23} molécules il faudrait répéter l'essai environ $10^{756\,916\,605\,020\,625\,000\,000\,000}$ fois.

5. Conclusion.

L'expérience de pensée qui consisterait à préparer un état microscopique exceptionnel a été imaginée par Maxwell en 1867 (voir [7]) sous la forme d'un très petit système capable d'observer instantanément la vitesse de chaque molécule et d'effectuer une sélection ou correction de trajectoire. Un tel système, appelé depuis *démon de Maxwell* permettrait, en sélectionnant les positions et vitesses individuelles de chaque molécule, de préparer n'importe quel état microscopique voulu à l'avance, en particulier ces états exceptionnels qui évoluent en faisant décroître l'entropie.

Dans beaucoup d'ouvrages de Physique statistique, on évoque l'idée du démon de Maxwell, puis on montre par des arguments plus ou moins quantitatifs selon les auteurs, que le second principe *interdit* l'existence d'un tel démon. L'argumentation consiste à montrer que la mise en oeuvre du démon de Maxwell coûte plus cher en entropie que ce qu'elle est censée en économiser. Cela revient à poser la croissance de l'entropie comme axiome, et à en déduire l'impossibilité d'un démon de Maxwell. Mais entre deux assertions logiquement équivalentes, poser l'une comme axiome et l'autre comme conséquence est affaire de pure convention. Il serait tout aussi logique de postuler l'impossibilité d'un démon de Maxwell pour en déduire la croissance de l'entropie. Comme on sait, on peut de manière tout à fait analogue démontrer l'impossibilité du mouvement perpétuel à partir de l'axiome de la conservation de l'énergie, mais beaucoup d'auteurs du *XIX^e* siècle ont préféré poser l'impossibilité du *perpetuum mobile* comme axiome premier, d'où se déduit la conservation de l'énergie.

Du point de vue de la seule logique, il est donc parfaitement indifférent de poser la croissance de l'entropie comme principe premier, ou de formuler le second principe par les énoncés a) et b) ci-dessus. Je soutiens cependant que la première formulation est au moins en partie responsable de la confusion qui entoure depuis toujours le problème de l'irréversibilité, et que je mentionnais à la fin de l'introduction. La formulation du second principe par les énoncés a) et b) a en effet deux avantages. Le premier avantage est de montrer très clairement la signification concrète, pratique, expérimentale, du second principe de la Thermodynamique, alors que la formulation par la croissance de l'entropie, plus éloignée des conditions pratiques, entretient une confusion, notamment par le fait que l'entropie n'est croissante que pendant des temps physiques, et non au sens mathématique. Cela permet aussi de séparer deux aspects complémentaires du second principe : l'énoncé a) exprime l'aspect purement probabiliste (celui qui est mis en avant dans l'interprétation statistique de l'entropie); l'énoncé b) exprime l'aspect empirique et phénoménologique (celui qui provient des limites humaines).

Le second avantage est de rendre moins mystérieuse la manière dont la réversibilité des mouvements microscopiques se traduit par l'irréversibilité des évolutions macroscopiques et donc d'éclaircir aisément le paradoxe de Loschmidt.

Les lois de la Physique sont des lois objectives du monde, mais elles concernent le monde phénoménal, tel qu'il est perçu par des êtres tels que nous. Les lois de la Thermodynamique décrivent le comportement des corps macroscopiques à l'aide de paramètres que nous pouvons manipuler et mesurer. Pour des êtres ayant la taille des molécules la physique serait très différente, elle montrerait un autre aspect du monde, objectif lui aussi, mais complémentaire. Le second principe contient cette dualité : les lois physiques expriment des propriétés de l'objet (le monde), mais aussi des propriétés du sujet qui observe le monde et établit ces lois. Le but de la Physique est certes de transcender la perception humaine pour atteindre une vérité plus profonde et inhumaine, et c'est bien ce que fait l'interprétation moléculaire de la Thermodynamique. Mais les limites humaines qui conditionnent la nature des lois physiques ne sont pas tant celles de la perception que celles de la complexité : la description exacte et complète du mouvement microscopique (peu importe ici que ce soit la classique ou la quantique), c'est-à-dire du mouvement individuel de toutes les molécules, ne nous est pas seulement interdit par nos facultés de perception, mais aussi par nos facultés de traitement de données. Or la complexité est bien plus difficile à transcender que la perception. C'est bien pourquoi il ne peut pas y avoir une Physique des mouvements moléculaires détaillés et c'est aussi pourquoi les lois de la Physique sont des lois que nous pouvons écrire et utiliser, et qui concernent des objets que nous pouvons observer et manipuler. Une loi dont la formulation exigerait $10^{639201738}$ symboles mathématiques ne peut pas être une loi de la Physique (ne serait-ce que parce jamais personne ne la découvrira). Pour échapper à ce second principe, Laplace devait invoquer "une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée".

L'énoncé b) exprime un fait empirique incontestable : il est impossible de préparer un état microscopique, on ne peut préparer que des états macroscopiques. Cet énoncé est consubstantiel au second principe.

Beaucoup d'ouvrages (en général des ouvrages non techniques, mais plutôt orientés vers les implications philosophiques) font état du fait qu'on n'a jamais pu prouver l'irréversibilité *mathématiquement*. On veut signifier par là qu'il n'y a aucun *théorème* qui fonde l'irréversibilité des évolutions macroscopiques sur la réversibilité des mouvements microscopiques. La tradition pseudo-scientifique que je mentionnais dans l'introduction se réclame

de ce constat, qui est juste, et qui est d'ailleurs souvent rapporté par des auteurs à la compétence d'ailleurs incontestable, pour se justifier : “on n’a jamais pu le démontrer, donc vous voyez bien que le problème est encore ouvert, et par conséquent susceptible de nouvelles recherches que justement nous nous proposons de mener”. Or il est évident qu’un tel théorème ne peut pas exister, puisque les démonstrations mathématiques ne peuvent pas prendre en compte des faits empiriques tels que b). Et quand on démontre mathématiquement la seule partie a) du second principe, il est parfaitement logique qu’on ne puisse pas résoudre le paradoxe de Loschmidt ! Mais cela ne signifie pas que le paradoxe de Loschmidt demeure un problème ouvert. Il est parfaitement résolu par la prise en compte de b) et le raisonnement présenté à la section précédente.

En conclusion, je propose d’énoncer les principes de la Thermodynamique sous la forme que voici, qui me paraît beaucoup plus claire. Elle se prête en tous cas beaucoup moins aux malentendus que j’ai décrits dans cet article. Il ne s’agit pas de *remplacer* les énoncés usuels par ceux ci-dessous, mais de les compléter ou de les commenter par ceux ci-dessous.

Premier principe de la Thermodynamique :

“Il est impossible de réaliser un mouvement perpétuel”.

Deuxième principe de la Thermodynamique :

“Il est impossible de réaliser un démon de Maxwell”.

(i.e. il n’est possible de préparer que des états macroscopiques, sans contrôle aucun de l’état microscopique précis qui le réalisera.)

L'IRRÉVERSIBILITÉ: Annexes

On regroupe ici un choix de textes historiques. Le lecteur qui aura fait l'effort de les lire attentivement se rendra compte que ce qu'on appelle "*le problème de l'irréversibilité*" n'a pratiquement pas évolué au cours des âges. Chacun des auteurs cités est obligé à son époque de répéter ce que les précédents ont dit, parce qu'apparemment cela n'a pas été compris. Ce ne le sera probablement jamais. Ce constat a déjà été fait par d'autres auteurs. Par exemple un chapitre du livre de Rudolph Peierls, *Surprises in Theoretical Physics* [7], commence ainsi :

We turn next to one of the most fundamental questions of statistical Mechanics, to which the answer has been known to some for a long time, but does not appear to be known very widely even today. The question is about the precise origin of the irreversibility in statistical mechanics.

[7], page 73.

1. Extrait de [4], (pages 18 – 20) :

Si un système isolé est dans une situation sensiblement non uniforme, il évoluera en fonction du temps pour se rapprocher de la situation ultime la plus uniforme où il est en équilibre (à l'exception de fluctuations qui ont peu de chances d'être importantes).

Irréversibilité

La conclusion [encadrée ci-dessus] affirme que quand un système macroscopique isolé évolue en fonction du temps, il tend à le faire dans une direction bien définie: depuis un état de moindre désordre vers une situation de plus grand désordre. Nous pourrions observer le processus du changement en filmant le système. Supposons maintenant que nous projetions le film à l'envers (c'est-à-dire que nous passions le film dans le projecteur en marche arrière) nous observerions alors sur l'écran le même *processus remontant le temps* c'est-à-dire le processus qui apparaîtrait si l'on imaginait que la direction du temps a été renversée. Le film sur l'écran serait vraiment très curieux en ce sens qu'il présenterait un processus par lequel un système évolue depuis un état de grand désordre vers une situation moins désordonnée, chose que l'on n'observe jamais en réalité. En regardant simplement le film sur l'écran, nous pourrions conclure, avec une complète certitude, que le film est projeté à l'envers.

Un processus est dit irréversible si le processus obtenu en changeant le signe du temps (celui qu'on observerait en projetant le film à l'envers) est tel qu'il n'apparaît pratiquement jamais en réalité. Mais tous les systèmes macroscopiques hors équilibre évoluent vers l'équilibre, c'est-à-dire vers une situation de plus grand désordre. (. . .)

Notons bien qu'il n'y a rien dans les lois de la mécanique régissant le mouvement des particules du système qui indique un sens privilégié pour l'écoulement du temps. En effet, imaginons que l'on prenne un film du gaz isolé en équilibre (. . .)

Commentaire : Ici il est fait référence à un “film”, en fait une simulation numérique du mouvement de 40 molécules dans une boîte rectangulaire. Cette simulation est une des grandes innovations didactiques du *Berkeley Physics Course* (pages 9 et 24 – 25), dont la force visuelle ne peut être reproduite en citation ; c'est pourquoi j'introduis ce commentaire. On peut mesurer le degré de désordre en donnant simplement en fonction du temps le *nombre de molécules situées dans la moitié gauche de la boîte*. La relation entre ce nombre et l'entropie n'est pas clairement définie, mais pour l'argumentation il suffit que les deux quantités aient le même type de comportement, qu'elles soient croissantes ou décroissantes en même temps et maximales ou minimales en même temps. Il s'agit donc de comprendre pourquoi on aboutit à l'irréversibilité alors que ce film est parfaitement réversible :

En regardant le film projeté sur l'écran, nous n'aurions aucun moyen de dire si le projecteur fonctionne dans le sens normal ou à l'envers. La notion de sens privilégié pour l'écoulement du temps n'apparaît que lorsque l'on considère un système macroscopique isolé dont nous avons de bonnes raisons de *penser* qu'il est dans une situation très spéciale non désordonnée à un certain temps t_1 . Si le système n'a pas été perturbé pendant longtemps et s'il atteint cette situation par le jeu des rares fluctuations à l'équilibre, il n'y a, en fait, rien qui indique le sens du temps. (. . .)

Suite du commentaire : Cette dernière phrase est capitale : supposons que le système ne subit aucune rupture de son mouvement normal (mouvement newtonien avec collisions mutuelles ou avec la paroi de la boîte, mais surtout pas avec autre chose, comme par exemple une nouvelle paroi séparant la boîte en deux). Cela exprime le fait que le système est isolé. Il peut alors arriver que “par hasard” à un instant t_1 toutes les molécules se trouvent dans la moitié droite de la boîte. Cela n'arrive pas souvent : avec quarante molécules, en admettant qu'entre deux vues successives du “film” les molécules se soient déplacées en moyenne sur une distance de l'ordre du dixième de la largeur de la boîte, il faut laisser passer au moins 10^{13} vues instantanées pour avoir une chance d'observer cela. Avec 8 molécules, il suffirait de 2500 images, et avec 10^{24} molécules il faudrait quelque $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ images. Pour un film au format 16 mm, cela correspond à une durée de projection de l'ordre de 100 secondes pour 8 molécules, de 10 000 ans pour 40 molécules, $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années pour 10^{24} molécules. Si vous regardez le film de 40 molécules pendant 10 000 ans, ne rater pas l'instant où toutes les molécules seront dans la moitié

gauche de la boîte (attention, l'événement ne dure qu'une fraction de seconde), car il serait dommage d'avoir attendu cet instant pendant 6000 ans et de le rater. Il n'aurait en effet guère de chances de se reproduire avant 10 000 nouvelles années. Lorsque cet événement se sera produit, découpez le morceau de film qui commence une minute avant et se termine une minute après et projetez le à l'endroit ou à l'envers. Il vous sera effectivement impossible de savoir lequel des deux sens de projection est plus réaliste que l'autre.

Mais dans aucune situation concrète de la vie réelle vous ne pourrez attendre $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années pour voir un gaz se concentrer spontanément dans une moitié de récipient. Si vous voulez mettre un gaz dans une bouteille vous le ferez passer par un tuyau, poussé par une pompe. D'où la conclusion :

Le système évolue toujours vers une situation de plus grand désordre, que le temps se déroule en avant ou en arrière. La seule autre possibilité pour amener le système dans une situation particulière non désordonnée à un instant t_1 , c'est une interaction avec un autre système à un instant antérieur à t_1 [c'est-à-dire une *préparation*]. Mais dans ce cas, le sens du temps est indiqué par la connaissance de cette interaction avec un autre système à un autre instant précédant t_1 .

Les textes suivants parlent de la même chose, avec seulement des différences de style.

2. Extrait de [5], (vers la fin) :

Ce n'est en aucune façon le signe avec lequel on compte les temps qui constitue la différence caractéristique entre un état organisé et un état dénué d'organisation. Si, dans l'état que l'on a adopté comme état initial de la représentation mécanique de l'univers, on venait à inverser exactement les directions de toutes les vitesses sans changer ni leurs grandeurs ni les positions des parties du système; si l'on parcourait, pour ainsi dire, à reculons, les différents états du système, ce serait encore un état non probable par lequel on débiterait et un état plus probable qu'on atteindrait par la suite. C'est seulement pendant le laps de temps qui conduit d'un état initial très peu probable à un état ultérieur beaucoup plus probable, que les états se transforment d'une façon différente dans la direction positive des temps et dans la direction négative.

Et un peu plus loin

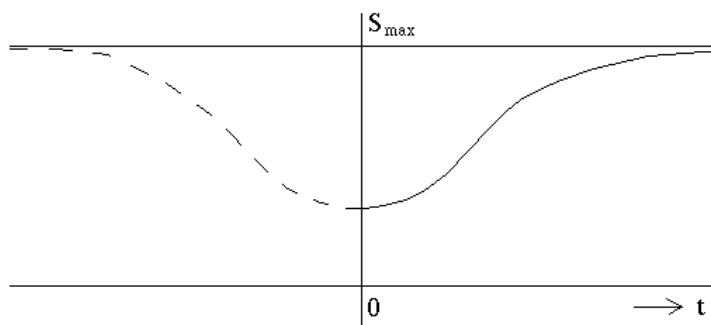
Pour l'univers tout entier, les deux directions du temps sont donc impossibles à distinguer, de même que dans l'espace, il n'y a ni dessus ni dessous. Mais, de même qu'en une région déterminée de la surface de notre planète, nous considérons comme le dessous la direction qui va vers le centre de la Terre, de même un être vivant dans une phase déterminée du temps et habitant un tel monde individuel, désignera la direction de la durée qui va vers les états les moins probables autrement que la direction contraire : la première sera pour lui le passé ou le commencement, et la seconde l'avenir ou la fin.

3. Extraits de [6] pages 75 – 81.

Peierls reprend d'abord le problème des molécules enfermées dans une boîte divisée par la pensée en deux moitiés (“the two chambers problem”):

Some textbooks explain this paradox [Loschmidt's paradox] by saying that, whereas particle mechanics makes predictions about the motion of individual particles, statistical mechanics makes probability statements about large ensembles of particles. This is true, but it does not explain why the use of probabilities and statistics should create a difference between past and future where none existed before.

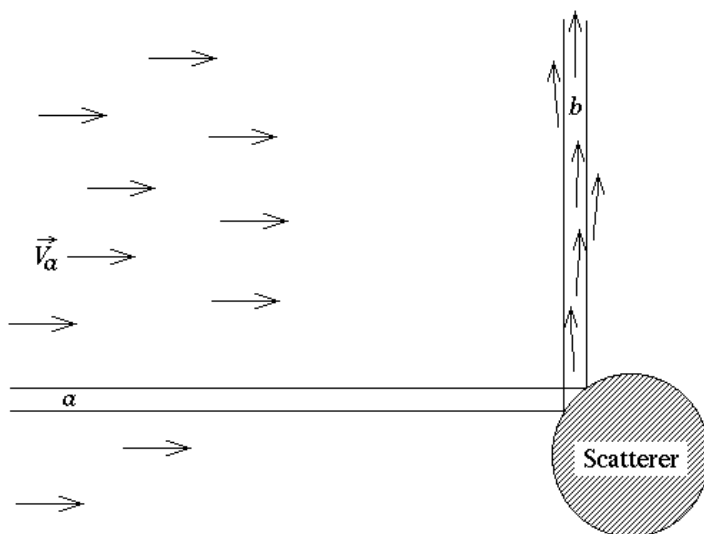
The real answer is quite different. Suppose from $t = 0$ when we assumed the particles distributed at random within each container and to move in random directions, we follow the particle trajectories, not for positive times, but negative t , i.e., into the past. This will give a curve for the entropy looking like the broken curve in figure [hereafter], and it will be the mirror image of the solid curve.



We see therefore that the symmetry in time is preserved fully in these two calculations. However, the solid curve to the right describes a situation which occurs in practice, and therefore provides the answer to a realistic question, whereas the broken curve to the left does not.

The situation to which the broken, left-hand curve would be applicable would be the following: Arrange for particles at $t = 0$ to be distributed in given numbers over the two chambers [the two parts of the box], their positions being random in each chamber, and their velocities having a Maxwell-Boltzmann distribution. Ensure that prior to $t = 0$, at least after some finite $-T$, there was no external interference, and observe the state of affairs at $t = -T$. This is evidently impossible; the only way in which we can influence the distribution of molecules at $t = 0$ is by taking action prior to that time.

On reconnaît dans ce passage essentiellement le même argument que dans [4], [5], [6] cités ci-dessus. Mais Peierls aborde encore le problème par un autre côté (le “Stoßzahl Ansatz” de Boltzmann, “l’argument du nombre de collision”). Considérons un flux de molécules en mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}_a$; cela correspond à un état macroscopique d’entropie non maximale. Dans ce flux, découpons par la pensée un cylindre étroit parallèle à la direction de ce flux, le cylindre a comme sur la figure ci-après:



Les molécules du cylindre a , qui ont toutes la même vitesse $\vec{v}_a$, rebondissent sur l'obstacle diffuseur ("the scatterer", hachuré sur la figure), en sorte que leurs vitesses après cette collision sont diverses puisque le diffuseur est supposé courbe. Par conséquent dans le cylindre b de la figure, il ne reste plus qu'une partie des molécules qui avant la collision étaient dans le cylindre a , mais elles s'ajoutent à celles qui étaient en dehors du cylindre a et qui ont poursuivi leur trajectoire à la vitesse $\vec{v}_a$ sans rencontrer de diffuseur.

The Stosszahl Ansatz of Boltzmann now consists in the seemingly innocuous assumption that ρ_a [the density in cylinder a] equals the average density of molecules of this type anywhere in the gas, i.e., that there is nothing exceptional about the particular cylinder we have defined.

This assumption is the origin of irreversibility, because if it is true, the corresponding statement about the cylinder labeled b in the figure is *not* true. The only special thing about cylinder a is that it contains the molecules which are going to collide with the scatterer; cylinder b contains those which have just collided. In non-equilibrium conditions, for example in the presence of a drift motion in the a direction, there will be more molecules in the gas as a whole moving in the a direction than in the b direction. Scattering by the center will therefore tend to increase the number in the b direction. If ρ_a is the same as elsewhere in the gas, ρ_b must then be greater than the average.

If the scattering is compared to the time-reversed situation, we see a difference. To reverse the direction of time, we have to replace each molecule in b by one of the opposite velocity, and have them scattered by the target to travel in the direction opposite to that of a . The number would not be changed, and if ρ_b in the cylinder b differs from the average over the whole gas, it will also differ from what, with Boltzmann, we should assume about the inverse process.

It seems intuitively obvious that the molecules should not be influenced by the fact that they are going to collide, and very natural that they should be affected by the fact that they have just collided. But these assumptions,

which cause the irreversibility, are not self-evident. If we assume, however, that the state of the gas was prepared in some manner in the past, and that we are watching its subsequent time development, then it follows that correlations between molecules and scattering centers will arise only from past, but not from future, collisions. This shows that the situation is, in principle, still the same as in our two-chamber problem.

L'argument n'est peut-être pas développé avec la clarté maximale, donc j'ajoute une petite explication supplémentaire. L'idée est ici la suivante: si au départ les molécules ont toutes la même vitesse $\vec{v}_a$, tout le monde comprend que, à cause du diffuseur, les vitesses après collision seront désordonnées. En retournant le temps, l'intuition sera choquée que des vitesses désordonnées aboutissent à un flux ordonné, parce que ce processus inverse donnera l'impression que les molécules du cylindre *b* devaient *savoir* comment elles allaient rebondir sur le diffuseur, et devaient ajuster leur vitesse de telle manière qu'après collision elle devienne égale à $-\vec{v}_a$. Elles devaient donc se déterminer d'après leur futur. Peierls veut ainsi montrer que l'inversion est contraire à la causalité.

We have recognized the origin of the irreversibility in the question we ask of statistical mechanics, and we have seen that their lack of symmetry originates in the limitations of the experiments we can perform. (. . .) As long as we have no clear explanation for this limitation, we might speculate whether the time direction is necessarily universal, or whether we could imagine intelligent beings whose time runs opposite to ours (. . .)

En attendant que l'on découvre l'explication de cette limitation, je propose de l'intégrer sans explication parmi les principes fondamentaux: *il est impossible de réaliser un démon de Maxwell*, tout comme on a fait pour l'inertie en attendant d'en trouver l'explication.

4. Extraits de [7] (chapitre 12). Ce passage de *Theory of Heat* se trouve quelques pages avant la fin. La partie qui décrit ce qui sera plus tard appelé *démon de Maxwell* — par Lord Kelvin — est extrêmement célèbre (“Imaginons cependant un être dont les facultés seraient si pénétrantes . . .”). Cependant la citation ci-dessous commence un peu avant ce passage célèbre et finit un peu au-delà afin de montrer qu'en 1871 Maxwell avait parfaitement compris que le point crucial du second principe n'est pas tant la croissance mathématique de l'entropie, que l'impossibilité de réaliser un état microscopique prédéfini. Cette lucidité pourra être confrontée à la confusion du débat qui perdure depuis 130 ans.

Un des faits les plus solidement établis de la Thermodynamique est que, dans un système qui est enfermé à l'intérieur d'une cloison ne permettant ni variation de volume ni échange de chaleur, et dont la température et la pression ont partout la même valeur, il est impossible de produire un écart de température sans fournir du travail. C'est là tout le sens du second principe

de la thermodynamique; ce dernier est sans aucun doute vérifié tant que nous ne manipulons les corps que par grandes masses et que nous ne disposons pas du pouvoir d'identifier et de manipuler les molécules individuelles qui composent ces masses. Imaginons cependant un être dont les facultés seraient si aigües qu'il serait en mesure de suivre chaque molécule dans son mouvement, tout en étant comme nous mêmes de conformation essentiellement finie; alors il lui serait possible de réaliser ce qui nous est impossible. Car nous avons vu que les molécules d'un gaz de température uniforme contenu dans un récipient ne sont nullement animées de vitesses uniformément distribuées, bien que la vitesse moyenne soit pratiquement la même sur n'importe quel sous-ensemble suffisamment gros d'entre elles. Imaginons donc qu'un tel récipient soit divisé en deux parties A et B par une cloison séparatrice, dans laquelle serait pratiquée une petite ouverture et qu'un tel être capable de voir les molécules individuelles ouvre ou ferme cette ouverture de manière à ne laisser passer de A vers B que les seules molécules rapides, et de B vers A les seules molécules lentes. Cet être est ainsi en mesure de relever la température de la partie B au détriment de la partie A sans dépense de travail, ce qui est en contradiction avec le second principe.

Ce n'est là qu'un exemple parmi d'autres, dans lequel les conclusions que nous avons tirées de notre expérience avec les corps composées d'un grand nombre de molécules pourraient cesser d'être applicables à des méthodes d'observation et d'investigation plus fines telles que pourraient les mettre en oeuvre des êtres capables de percevoir et manipuler individuellement ces molécules que nous ne pouvons manipuler que par grandes masses.

Et puisqu'en les manipulant par masses nous n'avons aucun accès aux molécules individuelles, nous sommes bien obligés de recourir au calcul statistique; ce pas accompli, nous abandonnons la méthode dynamique rigoureuse, par laquelle nous calculons le détail de chaque mouvement individuel.

N. B. Le passage ci-dessus est l'origine historique du *démon de Maxwell*; c'est en effet dans *Theory of Heat* de 1871 que cette idée est publiée pour la première fois. Elle était cependant reprise d'une lettre de Maxwell à Peter Guthrie Tait en 1867.

5. Voici maintenant deux extraits de H. Poincaré. Le principal argument avancé par Poincaré est celui du nécessaire retour de n'importe quel système dynamique à des états déjà occupés dans le passé. Il s'agit de la propriété des systèmes dynamiques que, ou bien les trajectoires sont périodiques, ou bien elles remplissent de manière dense l'hypersurface d'énergie. Si le système a occupé à l'instant $t = 0$ un état microscopique défini par les valeurs de toutes les coordonnées et impulsions, alors au bout d'un temps fini T il repassera *aussi près qu'on voudra* de cet état initial après s'en être écarté. Ainsi, si l'entropie avait une valeur non maximale S_0 à $t = 0$, elle redescendra inévitablement à cette valeur à l'instant T , après avoir été maximale entretemps. Cet argument a été repris notamment par E. Zermelo dans [11] (voir extraits de [12] et [13] ci-dessous). On ne reproduira pas ici les travaux de Poincaré sur ce point, ils sont bien trop techniques et de toute

façon sont fort connus. On les trouvera dans [9], mais aussi dans n'importe quel ouvrage actuel sur le chaos.

L'extrait qui suit concerne un autre théorème qui affirme qu'une fonction des coordonnées et des vitesses d'un système dynamique ne peut en aucun cas être monotone.

Extraits de [9] :

Parmi les tentatives qui ont été faites pour rattacher aux théorèmes généraux de la Mécanique les principes fondamentaux de la Thermodynamique, la plus intéressante est, sans contredit, celle que M. Helmholtz a développée dans son Mémoire sur la statique des systèmes monocycliques (Journal de Crelle, t. **97**) et dans son Mémoire sur le principe de la moindre action (Journal de Crelle, t. **100**). L'explication proposée dans ces deux Mémoires me paraît satisfaisante en ce qui concerne les phénomènes réversibles.

Les phénomènes irréversibles se prêtent-ils de la même manière à une explication mécanique; peut-on, par exemple, en se représentant le monde comme formé d'atomes, et ces atomes comme soumis à des attractions dépendant des seules distances, expliquer pourquoi la chaleur ne peut jamais passer d'un corps froid sur un corps chaud? Je ne le crois pas, et je vais expliquer pourquoi la théorie de l'illustre physicien ne me semble pas s'appliquer à ce genre de phénomènes.

Poincaré expose alors sa démonstration d'un théorème qui sera fréquemment invoqué dans la suite (voir plus bas les extraits de [14]). En voici le principe. Le système étant un système dynamique, on peut avoir les équations du mouvement exact de toutes les molécules sous la forme hamiltonienne; si les x_j sont les coordonnées et les p_j les impulsions des molécules, on aura [$H(x, p)$ étant l'hamiltonien du système] :

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad .$$

Si $S(t)$ est l'entropie comme fonction du temps on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial S}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

et ceci doit être positif. Si un état quelconque du système correspond à l'équilibre, appelons $p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)}$ les coordonnées correspondantes et considérons le développement de Taylor des fonctions S et H en puissances de $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$. Le terme linéaire est nul à cause du choix de l'origine. Poincaré écrit [j'ai modifié ses notations pour respecter les usages actuels] :

Pour ces valeurs $(p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)})$, les dérivées du premier ordre de S s'annulent, puisque S doit atteindre son maximum. Les dérivées de H s'annulent également, puisque ce maximum est une position d'équilibre et que dx_j/dt et dp_j/dt doivent s'annuler.

Si donc nous développons S et H suivant les puissances croissantes des $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$, les premiers termes qui ne s'annuleront pas seront ceux du deuxième degré. Si, de plus, on considère les valeurs de p_j et de x_j assez voisines de $p_j^{(0)}$ et $x_j^{(0)}$ pour que les termes du troisième degré soient négligeables, S et H se réduiront à deux formes quadratiques en $p_j - p_j^{(0)}$ et $x_j - x_j^{(0)}$.

La forme H pourra être définie ou indéfinie. L'expression

$$\sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

sera encore une forme quadratique par rapport aux $p_j - p_j^{(0)}$ et aux $x_j - x_j^{(0)}$.

Pour que l'inégalité $dS/dt > 0$ soit satisfaite, il faudrait que cette forme fût définie et positive; or il est aisé de s'assurer que cela est impossible si l'une des deux formes S et H est définie, ce qui a lieu ici.

Nous devons donc conclure que les deux principes de l'augmentation de l'entropie et de la moindre action (entendu au sens hamiltonien) sont inconciliables. Si donc M. von Helmholtz a montré, avec une admirable clarté, que les lois des phénomènes réversibles découlent des équations ordinaires de la Dynamique, il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la Mécanique rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton.

Extraits de [10]:

Maxwell admet que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations *compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra* d'une quelconque de ces situations.

C'est ce qu'on appelle le *postulat de Maxwell*. Nous le discuterons plus loin.
(. . .)

Et plus loin :

Tous les problèmes de Mécanique admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques et dont j'ai parlé ici même dans un précédent article [9].

Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est *certainement faux*.

Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle.

Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes : *sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles*.

Ce n'est pas tout : si le postulat était vrai, le système solaire serait instable; s'il est stable, en effet, il ne peut passer que par des situations peu différentes de sa situation initiale. C'est là la définition même de la stabilité.

Or, si la stabilité du système solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu probable.

Il est possible et même vraisemblable que le postulat de Maxwell est vrai pour certains systèmes et faux pour d'autres, sans qu'on ait aucun moyen certain de discerner les uns des autres.

Il est permis de supposer *provisoirement* qu'il s'applique aux gaz tels que la théorie cinétique les conçoit ; mais cette théorie ne sera solidement assise que quand on aura justifié cette supposition mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

On comprendra mieux l'ampleur du malentendu entre Poincaré (éminent représentant de la *Physique mathématique*) et la Physique réelle en évaluant *quantitativement* les grandeurs dont seules l'“existence”, ou la “finitude”, sont ici évoquées. En effet, le théorème de Poincaré sur l'éternel retour d'un système dynamique au voisinage de son état initial est un théorème qui s'énonce sous la forme :

“pour tout ε , il existe un temps T_ε au bout duquel le système repassera à une distance inférieure à ε de son état initial.”

Poincaré interprète le second principe d'une manière analogue : pour lui, affirmer la croissance de l'entropie, c'est affirmer que pour tout $t' > t$ on doit avoir $S(t') \geq S(t)$. Or le principe *physique* est très différent ; il dit que pour toute durée *physique* l'entropie ne peut diminuer que d'une valeur infime, et pendant un temps très bref. Le théorème de Poincaré affirme qu'il existe un temps T_ε au bout duquel l'entropie reprendra sa valeur initiale, mais il ne dit pas que ce temps est de l'ordre de $10^{300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ années, ni que la durée du retour à la valeur initiale est de l'ordre d'une fraction de seconde. Le vrai second principe ne dit pas sans autre précision que l'entropie est une fonction croissante du temps. Si on veut l'énoncer sous une forme vraiment complète, cela donne ceci :

a) Pour tout état initial du système sauf un nombre infime, et pendant des durées ayant un sens physique [donc incomparablement plus courtes que 10^N , N étant le nombre de molécules], l'entropie du système ne s'écarte pas notablement d'une fonction croissante.

b) Pendant chaque seconde de la durée d'existence physique du système isolé, l'entropie ne cesse de croître et décroître des millions de fois, en effectuant des oscillations qui sont toujours imperceptibles, car il est absolument impossible qu'un écart notable se produise spontanément et “par hasard” avant des temps bien supérieurs à $10^{\sqrt{N}}$.

6. Et voici la réponse de Boltzmann aux arguments de Poincaré. Ces derniers ont été rapportés aux physiciens de langue allemande par E. Zermelo (Wiedemanns Annalen, 1896, vol. **57**, p. 485 et vol. **59**, p. 793).

Extraits de [12] :

Le mémoire de M. Zermelo “*Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie*” montre que mes travaux sur le sujet n’ont malgré tout pas été compris ; en dépit de cela, je dois cependant me réjouir de cette publication comme étant la première manifestation de l’intérêt suscité par ces travaux en Allemagne.

Le théorème de Poincaré discuté au départ par M. Zermelo est bien entendu juste, mais son application à la théorie de la chaleur ne l’est pas. J’ai déduit la loi de répartition des vitesses de Maxwell du théorème probabiliste qu’une certaine grandeur $\mathcal{H}$ (en quelque sorte la mesure de l’écart de l’état du système par rapport à l’état d’équilibre) ne peut, pour un gaz en repos dans un récipient, que diminuer. La meilleure façon d’illustrer le mode de décroissance de cette grandeur sera d’en représenter la courbe de variation, en portant le temps t en abscisse et la quantité $\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_{\min}$ en ordonnée ; on obtiendra ainsi ce que j’appelle la courbe $\mathcal{H}$. (. . .)

La courbe reste alors la plupart du temps tout près de l’axe des abscisses. Ce n’est qu’à des instants extrêmement rares qu’elle s’en écarte, en formant ainsi une bosse, et il est clair que la probabilité d’une telle bosse décroît rapidement avec sa hauteur. À chacun des instants pour lesquels l’ordonnée de la courbe est très petite, règne la distribution des vitesses de Maxwell ; on s’en écarte notablement là où il y a une grosse bosse. M. Zermelo croit alors pouvoir déduire du théorème de Poincaré que le gaz ne peut se rapprocher constamment de la distribution de Maxwell que pour certaines conditions initiales très particulières, en nombre infime comparé à celui de toutes les configurations possibles, tandis que pour la plupart des conditions initiales il ne s’en rapprocherait pas. Ce raisonnement ne me semble pas correct. (. . .)

Si l’état [microscopique] initial du gaz correspond à une très grosse bosse, c’est-à-dire s’il s’écarte complètement de la distribution des vitesses de Maxwell, alors il s’en rapprochera avec une énorme probabilité, après quoi il ne s’en écartera plus qu’infinitésimalement pendant un temps gigantesque. Toutefois, si on attend encore plus longtemps, une nouvelle bosse notable de la courbe $\mathcal{H}$ finira par se produire à nouveau et si ce temps est suffisamment prolongé on verra même se reproduire l’état initial. On peut dire que, si le temps d’attente est infiniment long au sens mathématique, le système reviendra infiniment souvent à l’état initial.

Ainsi M. Zermelo a entièrement raison quand il affirme que le mouvement est, au sens mathématique, périodique [ou quasi-périodique] ; mais loin de contredire mes théorèmes, cette périodicité est au contraire en parfaite harmonie avec eux.

(Vienne, le 20 mars 1896)

Cette argumentation magistrale se poursuit, mais je l’interromps ici avec regret pour éviter de rendre cette anthologie trop longue.

Extraits de [13], suite de la réponse de Boltzmann aux objections de Zermelo.

Imaginons que nous retirions brusquement une cloison qui séparait deux gaz de nature différente enfermés dans un récipient [par exemple azote d’un côté et oxygène de l’autre]. On aurait du mal à trouver une autre situation où il y aurait davantage de variables aussi indépendantes les unes des autres, et où par conséquent l’intervention du Calcul des probabilités serait plus justifiée.

Admettre que dans un tel cas le Calcul des probabilités ne s'applique pas, que la plupart des molécules ne s'entremêlent pas, qu'au contraire des parties notables du récipient contiendraient nettement plus d'oxygène, d'autres plus d'azote, et ce pendant longtemps, est une thèse que je suis bien incapable de réfuter en calculant dans le détail le mouvement exact de trillions $[10^{12}]$ de molécules, dans des millions de cas particuliers différents, et d'ailleurs je ne veux pas le faire; une telle vision ne serait pas assez fondée pour remettre en question l'usage du Calcul des probabilités, et les conséquences logiques qui s'ensuivent.

D'ailleurs le théorème de Poincaré ne contredit pas l'usage du Calcul des probabilités, au contraire il parle en sa faveur, puisque ce dernier enseigne lui aussi que sur des durées fantastiques surviendront toujours de brefs instants pendant lesquels on sera dans un état de faible probabilité et de faible entropie, où par conséquent se produiront à nouveau des états plus ordonnés et même des états très proches de l'état initial. En ces temps prodigieusement éloignés dans le futur, n'importe quel écart notable de l'entropie par rapport à sa valeur maximale demeurera évidemment toujours hautement improbable, mais l'existence d'un très bref écart sera lui aussi [sur une telle durée prodigieusement longue] toujours hautement probable.

En effet, le Calcul des probabilités enseigne bien que si par exemple on jette une pièce mille fois il est très peu probable d'avoir mille fois face (la probabilité en est $2^{-1000} \simeq 10^{-301}$); mais si on la jette 10^{302} fois, alors on n'a qu'une chance sur 45 000 de ne *jamais* avoir une série de mille faces consécutives.

(reprise de la citation) Il est clair aussi, d'après cet exemple [celui de l'oxygène et de l'azote], que si le processus se déroule de façon irréversible pendant un temps observable, c'est parce qu'on est parti délibérément d'un état improbable.
(...)

(Vienne, le 16 décembre 1896)

7. Extraits de [14] pages 205 – 207. Cet extrait de *la nouvelle alliance* est particulièrement lumineux. Cependant on le comparera aux textes de Maxwell et Boltzmann ci-dessus pour constater que ce qui est expliqué là en 1979 était déjà bien compris par les pères fondateurs. Il est cependant prévisible que l'effort d'explication tenté par Prigogine et Stengers restera aussi vain que les efforts de Boltzmann, et que d'autres auteurs devront le répéter à nouveau en 2079.

Dès la publication du travail de Boltzmann en 1872, des objections furent opposées à l'idée que le modèle proposé ramenait l'irréversibilité à la dynamique. Retenons ici deux d'entre elles, l'une de Poincaré, l'autre de Loschmidt.

L'objection de Poincaré porte sur la question de la symétrie de l'équation de Boltzmann.

Pour éviter de rendre la citation trop longue ou d'avoir à donner trop d'explications, je signale simplement qu'il s'agit ici de l'équation établie par Boltzmann pour la fonction de distribution $f(r, v, t)$ qui représente le nombre de molécules du système ayant, à l'instant t , la vitesse v et la

position r . Boltzmann a montré que la fonction $\mathcal{H} = \int f \log f \, dv$ ne peut que diminuer, et a postulé que l'entropie du système est la même chose que $-k\mathcal{H}$ (k constante de Boltzmann).

Un raisonnement correct [écrit Poincaré] ne peut mener à des conclusions en contradiction avec les prémisses. Or, comme nous l'avons vu, les propriétés de symétrie de l'équation d'évolution obtenue par Boltzmann pour la fonction de distribution contredisent celles de la dynamique. Boltzmann ne peut donc pas avoir déduit l'entropie de la dynamique, il a introduit quelque chose, un élément étranger à la dynamique. Son résultat ne peut donc être qu'un modèle phénoménologique, sans rapport direct avec le dynamique.

Poincaré était d'autant plus ferme dans sa position qu'il avait étudié dans une brève note s'il était possible de construire une fonction M des positions et des moments, $M(p, q)$, qui aurait les propriétés de l'entropie (ou plutôt de la fonction $\mathcal{H}$) : alors qu'elle même serait positive ou nulle, sa variation au cours du temps ne pourrait que la faire décroître ou la maintenir à une valeur constante. Sa conclusion fut négative — dans le cadre de la dynamique *hamiltonienne* une telle fonction n'existe pas. Comment, d'ailleurs s'en étonner ? Comment les lois réversibles de la dynamique pourraient-elles engendrer, de quelque manière que ce soit, une évolution irréversible ? C'est sur une note découragée que Poincaré termine ses célèbres *Leçons de Thermodynamique* : il faudra sans doute faire appel à d'autres considérations, au calcul des probabilités. Mais comment justifier cet appel à des notions étrangères à la dynamique ?

Remarque 1 : Ce passage [voir aussi les citations directes de Poincaré ci-dessus] met l'accent sur une des sources possibles de confusion. Le résultat de Poincaré est un théorème *mathématique* : “il ne peut pas exister de fonction $M(p, q)$ qui soit à la fois décroissante et toujours positive”. Or l'entropie, ou toute fonction qui en tient lieu (comme $\mathcal{H}$), ou toute autre fonction caractérisant un état *macroscopique* (comme “le nombre de molécules situées dans la partie gauche du récipient”, etc.) n'est pas une fonction monotone, à cause des fluctuations. Lorsqu'on dit que le système est parvenu à l'équilibre et y reste, c'est-à-dire que l'entropie est devenue maximale, cela signifie qu'elle continue presque éternellement à osciller autour de son maximum théorique et non qu'elle reste mathématiquement égale à ce maximum ou continue de s'en approcher sans cesse davantage et *en croissant*. Ces oscillations sont très petites si le nombre N de molécules est grand (leur écart-type est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$), mais il peut s'en produire d'importantes si on attend pendant un temps de l'ordre de 10^N . Il est donc essentiel de bien comprendre ceci : l'entropie n'est pas une fonction croissante dans le sens mathématique du terme ; c'est seulement une fonction croissante dans un sens pratique. On peut l'exprimer en disant que *sur des durées raisonnables*, et à *de petites fluctuations près* elle ne peut décroître. La véritable entropie d'un système physique réel n'est donc pas concernée par le théorème de Poincaré. C'est ce que Boltzmann s'est efforcé d'expliquer dans [12] et [13].

Suite de la citation (page 206) :

L'objection de Loschmidt permet, quant à elle, de mesurer les *limites de validité* du modèle cinétique de Boltzmann. Il note en effet que ce modèle ne peut rester valable après un renversement du sens des vitesses $v \mapsto -v$. *Du point de vue de la dynamique*, il n'y a pas d'échappatoire : les collisions, se produisant en sens inverse, “déferont” ce qu'elles ont fait, le système retournera vers son état initial. Et la fonction $\mathcal{H}$, qui dépend de la distribution des vitesses, devra bien croître elle aussi jusqu'à sa valeur initiale. Le renversement des vitesses impose donc une évolution *antithermodynamique*. Et en effet, la simulation sur ordinateur confirme bien une *croissance de $\mathcal{H}$* après l'inversion des vitesses sur un système dont les trajectoires sont calculées de manière exacte.

Il faut donc admettre que la tentative de Boltzmann n'a rencontré qu'un succès partiel : certaines conditions initiales, notamment celles qui résultent de l'opération d'inversion des vitesses, peuvent engendrer, en contradiction avec le modèle cinétique, une évolution *dynamique* à $\mathcal{H}$ croissant. Mais comment distinguer les systèmes auxquels le raisonnement de Boltzmann s'applique de ceux auxquels il ne s'applique pas ?

Ce problème une fois posé, il est facile de reconnaître la nature de la limitation imposée au modèle de Boltzmann. Ce modèle repose en fait sur une hypothèse statistique qui permet l'évaluation du nombre moyen de collisions — “le chaos moléculaire” .

Remarque 2 : le terme “chaos” n'est pas employé ici dans le sens précis qu'il a acquis depuis, et devrait être remplacé — ici et dans la suite — par “stochasticité”. En effet c'est le mouvement dynamique exact des molécules qui est chaotique (“chaos déterministe”) et l'hypothèse statistique qu'il est question d'introduire consiste à éliminer l'exactitude déterministe des conditions initiales et de les supposer simplement aléatoires.

(reprise de la citation) Cette hypothèse suppose qu'*avant* la collision, les molécules ont des comportements indépendants les uns des autres, ce qui revient à dire qu'il n'y a aucune corrélation entre leurs vitesses. Or, si on impose au système de “remonter le temps” , on crée une situation tout à fait anormale : certaines molécules sont désormais “destinées” à se rencontrer en un instant déterminable à l'avance et à subir à cette occasion un changement de vitesse prédéterminé. Aussi éloignées qu'elles soient les unes des autres au moment de l'inversion des vitesses, cette opération crée donc entre elles des corrélations, elles ne sont plus indépendantes. L'hypothèse du chaos [stochasticité] moléculaire ne peut être faite à propos d'un système qui a subi l'opération d'inversion des vitesses.

L'inversion des vitesses est donc une opération qui crée un système *hautement organisé*, au comportement apparemment finalisé : l'effet des diverses collisions produit, comme par harmonie préétablie, une évolution globale “antithermodynamique” (par exemple la ségrégation spontanée entre molécules lentes et rapides si, à l'instant initial, le système avait été préparé par la mise en contact de deux gaz de températures différentes). Mais accepter la possibilité de telles évolutions antithermodynamiques, même rares, même exceptionnelles (aussi exceptionnelles que la condition initiale issue de l'inversion des vitesses), c'est mettre en cause la formulation du second principe : il existe des cas où par exemple une différence de température pourrait se produire “spontanément” . Nous devons alors préciser les circonstances dans lesquelles un processus irréversible

pourrait devenir réversible, voire même annuler un processus irréversible qui s'est produit dans le passé. Le principe cesse d'être un principe pour devenir une généralisation de portée limitée.

Remarque 3 : Prigogine et Stengers parlent donc ici d'une *mise en cause* du second principe, et d'une limitation de sa portée. La limitation étant que, pour un système dynamique *chaotique* (au sens actuel de ce terme : chaotique = rigoureusement déterministe, mais avec extrême sensibilité aux conditions initiales), l'entropie n'est pas une fonction croissante dans *absolument* tous les cas. En réalité c'est plutôt un problème d'interprétation de l'énoncé du second principe. Il y a un "second principe pour mathématiciens" qui stipule que l'entropie est une fonction du temps t qui tend en croissant vers une limite lorsque t tend vers l'infini. Ce principe est faux car il existe des états microscopiques du système qui le mettent en défaut (les états "*hautement organisés*, au comportement apparemment finalisé"). Même si on écarte ces états exceptionnels, la démonstration de Poincaré prouve en outre que l'entropie n'est jamais rigoureusement croissante au sens mathématique, mais on pourrait aisément corriger ce dernier défaut en énonçant par exemple : "l'entropie ne s'écarte jamais notablement d'une fonction croissante". La difficulté qui demeurera cependant toujours est que, même ainsi énoncé, on ne pourra pas garantir avec l'absolue certitude mathématique que la fonction reste croissante pendant des durées aussi grandes qu'on veut. Pourtant, pour la quasi totalité des états, la fonction restera croissante pendant des durées si longues qu'elles en perdent tout sens physique. Ainsi, en tant que "généralisation de portée limitée" (et non principe digne de ce nom) le second principe pourrait s'énoncer :

Pour tout état initial du système sauf un nombre infime, et pendant des durées courtes devant 10^N (N étant le nombre de molécules), l'entropie du système ne s'écarte pas notablement d'une fonction croissante.

Voir plus haut les commentaires à propos de [11].

Cela dit, le fait de juger cet énoncé comme trop réduit ou trop limité pour mériter le nom de principe est une affaire de convention. Car les durées (non courtes devant 10^N) pour lesquelles il ne s'applique pas n'ont aucune existence pratique, et les fluctuations qui produisent les oscillations non monotones de l'entropie sont bien plus petites que ce qu'on a l'habitude, dans les théories physiques, de considérer comme nul.

Les états "*hautement organisés*, au comportement apparemment finalisé" ont une probabilité si inconcevablement petite de se produire spontanément qu'ils ne se produisent jamais (Émile Borel), et la seule possibilité de les rencontrer en physique serait de les préparer. Pour avoir un principe *physique* et non un principe pour purs mathématiciens, censé s'appliquer

dans le ciel des idées, il suffit de dire qu'on ne peut pas préparer de tels états et d'inclure cette impossibilité dans l'énoncé du principe. Cela ne le fait pas tomber d'un piédestal, mais a au contraire l'avantage d'en dégager le véritable sens, celui d'une propriété de la nature et non d'une vision de l'esprit.

Pages 211 – 213, est présentée l'“interprétation subjectiviste” de l'irréversibilité [que les auteurs vont ensuite critiquer]:

Mélangeons [proposait Gibbs], une goutte d'encre noire à de l'eau pure. Bientôt l'eau devient grise en une évolution qui, pour nous, est l'irréversibilité même; cependant, pour l'observateur aux sens assez aigus pour observer non pas le liquide macroscopique mais chacune des molécules qui constituent la population, le liquide ne deviendra jamais gris; l'observateur pourra suivre les trajectoires de plus en plus délocalisées des “molécules d'encre” d'abord rassemblées dans une petite région du système, mais l'idée que le milieu d'hétérogène est irréversiblement devenu homogène, que l'eau est “devenue grise” sera, de son point de vue, une illusion déterminée par la grossièreté de nos moyens d'observation, une illusion subjective. Lui-même n'a vu que des mouvements, réversibles, et ne voit rien de gris, mais du “noir” *et* du “blanc” . (. . .) Selon cette interprétation, la croissance de l'entropie ne décrit pas le système lui-même, mais seulement notre connaissance du système. Ce qui ne cesse de croître c'est l'ignorance où nous sommes de l'état où se trouve le système, de la région de l'espace des phases où le point qui le représente a des chances de se trouver. À l'instant initial, nous pouvons avoir beaucoup d'informations sur un système, et le localiser assez précisément dans une région restreinte de l'espace des phases, mais, à mesure que le temps passe, les points compatibles avec les conditions initiales pourront donner naissance à des trajectoires qui s'éloignent de plus en plus de la région de départ. L'information liée à la préparation initiale perd ainsi irréversiblement sa pertinence jusqu'au stade ultime où on ne connaît plus du système que les grandeurs que l'évolution dynamique laisse invariantes. Le système est alors à l'équilibre (. . .) La croissance de l'entropie représente donc la dégradation de l'information disponible; le système est initialement d'autant plus loin de l'équilibre que nous le connaissons mieux, que nous pouvons le définir plus précisément, le situer dans une région plus petite de l'espace des phases.

Cette interprétation subjectiviste de l'irréversibilité comme croissance de l'ignorance (encore renforcée par l'analogie ambiguë avec la théorie de l'information) fait de l'observateur le vrai responsable de l'asymétrie temporelle qui caractérise le devenir du système. Puisque l'observateur ne peut embrasser d'un seul coup d'oeil les positions et les vitesses des particules qui constituent un système complexe, il n'a pas accès à la vérité fondamentale de ce système: il ne peut connaître l'état instantané qui en contient à la fois le passé et le futur, il ne peut saisir la loi réversible qui, d'instant en instant, lui permettrait d'en déployer l'évolution. Et il ne peut pas non plus manipuler le système comme le fait le démon de Maxwell, capable de séparer les particules rapides et les particules lentes, et d'imposer ainsi à un système une évolution antithermodynamique vers une distribution de température de moins en moins uniforme.

La thermodynamique est certes la science des systèmes complexes, mais, selon cette interprétation, la seule spécificité des systèmes complexes, c'est que

la connaissance qu'on a d'eux est toujours approximative et que l'incertitude déterminée par cette approximation va croissant au cours du temps. (. . .)

Cependant, l'objection est immédiate : dans ce cas, la thermodynamique devrait être aussi universelle que notre ignorance. C'est là la pierre d'achoppement de l'ensemble des interprétations "simples" de l'entropie, en termes d'incertitude sur les conditions initiales ou sur les conditions aux limites. Car, l'irréversibilité *n'est pas une propriété universelle*; articuler dynamique et thermodynamique nécessite donc la définition d'un critère *physique* de différenciation entre les systèmes, selon qu'ils peuvent ou non être décrits thermodynamiquement, nécessite une définition de la complexité en termes physiques et non en termes de manque de connaissance.

À partir de là les auteurs insistent sur le caractère objectif de l'irréversibilité ou plutôt de la complexité (page 213 et après) : le comportement des corps macroscopiques est bien réel et physique, la complexité est une qualité réelle et physique qui décidera si le corps aura un comportement thermodynamique ou un mouvement mécanique, etc. Ils ont bien raison, mais cela nous éloignerait de notre sujet.

RÉFÉRENCES.

- [1] **Ludwig Boltzmann** *Weitere Studien über Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*. Wiener Berichte **66** (1872), p. 275.
- [2] **James Clerk Maxwell** *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases*. Phil. Mag. **19** (1860), pp. 19.
- [3] **Joseph Loschmidt** *Über das Wärmegleichgewicht eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwere*. Wiener Berichte **73**, (1876), pp. 139.
- [4] **Frederik Reif** *Cours de Physique de Berkeley : tome 5, Physique statistique*. Armand Colin, Paris (1972), pour l'édition française.
- [5] **Ludwig Boltzmann** *Leçons sur la théorie des gaz*. Réédition Jacques Gabay, Paris, (1987).
- [6] **Rudolf Peierls** *Surprises in Theoretical Physics*. Princeton University Press (coll. Princeton series in Physics), Princeton, New Jersey (1979).
- [7] **James Clerk Maxwell** *Theory of Heat*. Longmans & Green, London (1871).

- [8] **Henri Poincaré** *Sur le problème des trois corps*. Revue générale des Sciences pures et appliquées II, vol **8** (15 janvier 1891), page 529.
- [9] **Henri Poincaré** *Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, vol **108** (18 mars 1889), pages 550 – 553.
- [10] **Henri Poincaré** *Sur la théorie cinétique des gaz*. Revue générale des Sciences pures et appliquées, vol **5** (1894), pages 513 – 521.
- [11] **Ernst Zermelo** *Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie* Wiedemanns Annalen, vol **57** p.485 et vol **59** p.793 (1896).
- [12] **Ludwig Boltzmann** *Entgegnung auf die Wärmethoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo*. Wiedemanns Annalen, vol **57** (1896), pages 773 – 784.
- [13] **Ludwig Boltzmann** *Zu Hrn. Zermelos Abhandlung “Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge”*. Wiedemanns Annalen, vol **60** (1897), pages 392 – 398.
- [14] **Ilya Prigogine, Isabelle Stengers** *La nouvelle alliance*. NRF Gallimard, Paris (1979).