

VIII. LES PROCESSUS EN CASCADE.

(Une application des fonctions génératrices.)

Ce chapitre est plus technique que les autres et convient plutôt aux mathématiciens (et à condition qu'ils ne soient pas trop pressés). On pourra le considérer comme une suite de problèmes corrigés. C'est en quelque sorte un chapitre de travaux dirigés. Une lecture purement passive est déconseillée : le lecteur n'entendra vraiment profit que s'il se munit d'un crayon et d'un papier, et effectue lui-même les calculs présentés ici.

Ce chapitre peut être omis en première lecture, mais on conseille cependant les problèmes 1 et 2 du début, qui sont élémentaires, et beaucoup plus faciles que ce qui suit.

Problème 1. Deux joueurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ jouent au jeu de *pile ou face* de la manière suivante : $\mathcal{A}$ donne 1 franc à $\mathcal{B}$ chaque fois que *face* sort et $\mathcal{B}$ donne 1 franc à $\mathcal{A}$ chaque fois que *pile* sort. La pièce est lancée n fois de suite. Trouver la loi de probabilité du gain de $\mathcal{A}$.

Ce problème a déjà été traité sous forme déguisée au chapitre III (marches aléatoires), début du §2. Le gain peut prendre les valeurs $-n, -n+2, -n+4, -n+6, \dots, n-2, n$, et les probabilités correspondantes sont

$$\mathcal{P}(\text{gain} = -n + 2k) = 2^{-n} \binom{n}{k} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}}$$

Nous allons le retrouver en utilisant les fonctions génératrices.

L'idée est simple : nous avons vu que la fonction génératrice de la somme de plusieurs variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions génératrices. Nous allons donc décomposer le gain en une somme de variables aléatoires indépendantes.

Il est évident par définition même que le gain global sur les n lancers est la somme algébrique des gains obtenus pour chacun des n lancers. Or pour chaque lancer ce gain est égal (en francs) à $+1$ ou -1 , selon que *face* ou *pile* est sorti. Le gain au j^{e} lancer est donc une variable aléatoire X_j dont la loi est

$$X_j = \begin{cases} +1 & (\frac{1}{2}) \\ -1 & (\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Le gain global est alors la somme $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. L'indépendance stochastique des variables aléatoires X_j est le reflet de l'indépendance causale entre les lancers : dire que X_j est indépendante de X_k signifie que les probabilités de gagner ou perdre 1 franc au k^{e} lancer ne dépendent pas du résultat obtenu au j^{e} lancer.

Remarque. L'indépendance stochastique entre les X_j est déduite directement des circonstances physiques du problème ; mais bien entendu, ces circonstances se reflètent aussi dans la structure de l'espace des épreuves Ω , qui, comme cela a été expliqué au chapitre **IV**, doit être un produit. Ω est ici l'ensemble des mots de n lettres qu'on peut écrire avec l'alphabet $\{P, F\}$, et s'identifie au produit cartésien $\{P, F\} \times \{P, F\} \times \cdots \times \{P, F\}$ (n fois). En tant qu'*application* de Ω dans $\mathbb{R}$ (ce qui est, rappelons-le, la définition mathématique d'une variable aléatoire), X_j est l'application qui, à une épreuve ω qui est un mot de n lettres, fait correspondre $+1$ si la j^{e} lettre de ω est F , et -1 si la j^{e} lettre de ω est P . Lorsque l'espace Ω est considéré comme le produit cartésien de n fois $\{P, F\}$, X_j ne dépend donc que de la j^{e} coordonnée, ce qui est exactement l'expression mathématique de l'indépendance stochastique.

La fonction génératrice commune des X_j est donc

$$G_X(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

et puisque les X_j sont indépendantes, leur somme S a pour fonction génératrice

$$G_S(z) = \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} z^{n-2k}$$

On constate dans le développement en puissances de z que les exposants sont $n - 2k$, qui sont les valeurs prises par S ; quant aux coefficients correspondants, ils coïncident bien avec le résultat déjà connu.

Nous voyons ici sur un exemple très simple comment fonctionne la *méthode des fonctions génératrices* : on commence par calculer la fonction génératrice, qui est un polynôme ou à la limite une fonction analytique de la variable complexe z . Puis un développement en puissances de z met en évidence les exposants de z qui sont les valeurs de la variable, ainsi que les coefficients qui sont les probabilités correspondantes.

Problème 2. Les deux joueurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ jouent maintenant au jeu de *pile ou face* d'une manière différente : comme d'habitude $\mathcal{A}$ donne 1 franc à $\mathcal{B}$ chaque fois que *face* sort et $\mathcal{B}$ donne 1 franc à $\mathcal{A}$ chaque fois que *pile* sort ; mais au lieu de s'arrêter après un nombre n de lancers convenu à l'avance, les joueurs lancent en outre un dé en même temps que leur pièce, et décident d'arrêter le jeu dès que le dé donne six.

Trouver la loi de probabilité du gain.

Lorsque nous avons résolu le problème précédent (loi de probabilité du gain pour un nombre fixé n de lancers), nous devions trouver la loi de probabilité d'une somme $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de variables aléatoires indépendantes. Cette fois nous avons encore affaire à une somme de variables aléatoires indépendantes, mais le nombre de termes de la somme est lui-même aléatoire.

On peut donc reformuler le problème sous la forme abstraite que voici : soient $X_1, X_2, X_3 \dots$ des variables aléatoires indépendantes, *toutes de même loi*, et Y une variable aléatoire prenant les valeurs $1, 2, 3 \dots$, et *indépendante* des $X_1, X_2, X_3 \dots$. Trouver la loi de la variable

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_Y$$

Solution. D'après la formule des probabilités conditionnelles (IV.4.) on peut décomposer $\mathcal{P}(S = k)$ ainsi :

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_n \mathcal{P}(S = k \mid Y = n) \mathcal{P}(Y = n) \quad (VIII.1.)$$

Or l'événement $A = \{X_1 + X_2 + \cdots + X_Y = k \text{ et } Y = n\}$ est égal à l'événement $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k \text{ et } Y = n\}$. En effet toute épreuve ω appartenant à A est une épreuve pour laquelle $Y(\omega) = n$, donc $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{Y(\omega)}(\omega) = S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$. Ces deux événements étant égaux, leurs probabilités sont égales. En outre, Y étant stochastiquement indépendante des X_j , on peut dire aussi que

$$\mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_n = k \text{ et } Y = n) = \mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n)$$

Mais **on ne peut pas** dire que

$$\mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_Y = k \text{ et } Y = n) = \mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_Y = k) \times \mathcal{P}(Y = n)$$

car dans le premier cas les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et Y sont indépendantes, tandis que dans le second, les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \cdots + X_Y$ et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque. Pour bien comprendre cela, il faut se représenter (comme toujours en cas d'indépendance stochastique; voir §V.3.) l'espace Ω comme un tableau ou une matrice formé de lignes et de colonnes, de sorte que $X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ ne dépend que de la ligne où se trouve ω et $Y(\omega)$ que de la colonne où se trouve ω . Les événements $B = \{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k\}$ et $C = \{Y = n\}$ sont respectivement des ensembles de lignes complètes et des ensembles de colonnes complètes; leur intersection est donc un rectangle (une sous-matrice) du tableau, et le cardinal de ce rectangle est bien le produit du nombre

de lignes par le nombre de colonnes. Mais l'événement $E = \{X_1 + X_2 + \cdots + X_Y = k\}$ n'est pas une sous matrice car $\{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{Y(\omega)}(\omega) = k\}$ dépend à la fois de la ligne et de la colonne où se trouve l'élément ω , de sorte que l'événement E n'est pas formé de lignes complètes ; son intersection avec C n'est donc pas l'intersection d'un ensemble de lignes complètes avec un ensemble de colonnes complètes, mais est pourtant un rectangle, car les morceaux de lignes qui manquent sont tous à l'extérieur de l'ensemble C .

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S = k \mid Y = n) &= \frac{\mathcal{P}(S = k \text{ et } Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k \text{ et } Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n)}{\mathcal{P}(Y = n)} \\ &= \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) \end{aligned} \quad (VIII.2.)$$

Ainsi la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}(S = k \mid Y = n)$ est égale à la probabilité $\mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k)$. En combinant (VIII.1) et (VIII.2), il vient

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_n \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n) \quad (VIII.3.)$$

Appelons comme dans le problème précédent $G_X(z)$ la fonction génératrice commune des X_j et $G_Y(z)$ celle de Y . Par définition :

$$G_S(z) = \sum_k \mathcal{P}(S = k) z^k$$

En remplaçant $\mathcal{P}(S = k)$ par l'expression (VIII.3) :

$$G_S(z) = \sum_k \sum_n \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) \times \mathcal{P}(Y = n) z^k$$

Puis en inversant l'ordre de sommation entre k et n :

$$G_S(z) = \sum_n \left[\sum_k \mathcal{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) z^k \right] \times \mathcal{P}(Y = n)$$

Mais l'expression entre crochets n'est autre que $G_X(z)^n$, de sorte que finalement

$$G_S(z) = \sum_n [G_X(z)]^n \mathcal{P}(Y = n) = G_Y(G_X(z))$$

ou encore

$$G_S = G_Y \circ G_X \quad (VIII.4.)$$

Pour appliquer cela à notre problème, il nous faut donc connaître la fonction G_Y , c'est-à-dire la loi de Y . Cela est très simple. L'événement $\{Y = n\}$ est identique à l'événement "le dé donne 6 la n^e fois, et 1, 2, 3, 4, ou 5 les $n-1$ fois précédentes. Pour calculer la probabilité de cet événement, l'espace Ω_n correspondant à n lancers successifs du dé suffit : il est formé des mots de n lettres écrits avec l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donc $\#\Omega = 6^n$. Les éléments de $\{Y = n\}$ sont, parmi ces mots, ceux dont la dernière lettre est 6 et dont les $n-1$ premières sont prises dans l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, donc $\#\{Y = n\} = 5^{n-1}$. Ainsi

$$\mathcal{P}(Y = n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$$

et

$$G_Y(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{5^{n-1}}{6^n} z^n$$

Si on calcule cette somme de $n = 1$ à $n = N$, on obtient

$$\sum_{n \geq 1}^{n=N} \frac{5^{n-1}}{6^n} z^n = \frac{z}{6-5z} \cdot \left[1 - \left(\frac{5z}{6}\right)^N\right]$$

Pour pouvoir faire tendre N vers l'infini, il faudrait avoir construit un espace Ω lui-même infini. Mais il est bien clair que si n est grand, la probabilité pour que le dé ne donne jamais 6 avant la n^e fois est infinitésimale : par exemple pour $n = 1000$ cette probabilité serait $5^{999}/6^{1000} \simeq 1.318 \cdot 10^{-80}$. Pour qu'il y ait un sens à distinguer cela de zéro, il faudrait que l'équiprobabilité des six faces du dé soit vérifiée à 10^{-80} près. Comme il ne peut en être ainsi, il est absurde de prétendre pousser la sommation aussi loin. On va donc considérer que la probabilité pour que Y soit supérieur à 20 est nulle, et que

$$G_Y(z) \simeq \frac{z}{6-5z}$$

Par ailleurs $G_X(z)$, la fonction génératrice des X_j , est égale à $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, donc d'après (VIII.4) :

$$G_S(z) \simeq \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{6 - \frac{5}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{z^2 + 1}{-5z^2 + 12z - 5} \quad (VIII.5.)$$

Si à partir de ce résultat on veut retrouver les probabilités $\mathcal{P}(S = k)$, il faut développer cette expression en série entière. Les valeurs de S

sont nécessairement entières, mais peuvent être aussi bien positives que négatives ; il faut donc rechercher un développement de Laurent (voir cours de mathématique). Pour cela on commence par décomposer l'expression obtenue en éléments simples. Les racines du dénominateur $-5z^2 + 12z - 5$ sont

$$z_1 = \frac{6 - \sqrt{11}}{5} \quad ; \quad z_2 = \frac{6 + \sqrt{11}}{5} \quad ;$$

On remarquera que les deux sont réelles positives, et qu'en outre $z_1 < 1$ et $z_2 > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + 1}{-5z^2 + 12z - 5} &= -\frac{1}{5} + \frac{\frac{12}{5}z}{-5z^2 + 12z - 5} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{A}{1 - \frac{z_1}{z}} \frac{z_1}{z} + \frac{B}{1 - \frac{z}{z_2}} \end{aligned}$$

On obtient sans difficulté les nombres A et B :

$$A = B = \frac{6}{5\sqrt{11}}$$

Le développement de Laurent de la fonction $(z^2 + 1)/(-5z^2 + 12z - 5)$ résulte alors des séries géométriques de

$$\frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}} \frac{z_1}{z} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{z_1}{z}\right)^k$$

et

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{z_2}\right)^k$$

c'est-à-dire

$$G_S(z) = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 1 \right) + \sum_{k \geq 1} \frac{6}{5\sqrt{11}} \left(\frac{6 - \sqrt{11}}{5} \right)^k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

On en déduit que

$$\mathcal{P}(S = 0) = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 1 \right)$$

et pour $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\mathcal{P}(S = \pm k) = \frac{6}{5\sqrt{11}} \left(\frac{6 - \sqrt{11}}{5} \right)^k$$

Le calcul numérique donne les valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$\mathcal{P}(S = \pm k)$	0.1618	0.1942	0.1042	0.0559

k	4	5	6	7
$\mathcal{P}(S = \pm k)$	0.0300	0.01161	0.0086	0.0046

Plus généralement, si au lieu d'un dé on avait employé un procédé quelconque donnant q résultats possibles au lieu de 6, de sorte que la loi de Y eût été $\mathcal{P}(Y = n) = \frac{1}{q}(1 - \frac{1}{q})^{n-1}$ au lieu de $\mathcal{P}(Y = n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$, alors on aurait obtenu pour la loi de S :

— si $k \neq 0$:

$$\mathcal{P}(S = \pm k) = \frac{q}{(q-1)\sqrt{2q-1}} \left(\frac{q - \sqrt{2q-1}}{q-1} \right)^k$$

— et si $k = 0$:

$$\mathcal{P}(S = 0) = \frac{1}{(q-1)} \left(\frac{q}{\sqrt{2q-1}} - 1 \right)$$

On constate que la répartition des probabilités entre les différentes valeurs de la variable S est très différente de ce qu'on obtenait pour la somme $\Sigma = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ d'un nombre *fixé* de variables aléatoires indépendantes : pour n grand, Σ avait une répartition en e^{-x^2} , ce qui n'est plus du tout le cas pour S . Bien entendu, cela se comprend aisément : la loi en e^{-x^2} provient de ce que Σ est la somme d'un *grand* nombre de X_j ; par contre S peut aléatoirement être la somme d'un grand nombre ou d'un petit nombre de X_j . Si q est petit (par exemple $q = 6$ comme dans le cas du dé), il est de toute façon peu probable que Y puisse prendre de grandes valeurs ; mais même si q est très grand, il y a une probabilité non négligeable pour que la somme S soit la somme d'un nombre trop petit de X_j , en tous cas trop petit pour donner une loi de la forme e^{-x^2} .

Problème 3 : réaction en chaîne. Dans la fission nucléaire, un neutron casse un noyau d' U^{235} en libérant deux ou trois nouveaux neutrons, qui à leur tour reproduiront chacun l'exploit du premier.

La loi de probabilité du nombre de neutrons issu d'une fission étant donnée, trouver la probabilité pour que la réaction ne s'éteigne pas.

Dans un tel processus interviennent aussi les produits de fission, qui sont les débris hautement radioactifs des noyaux d' U^{235} ; mais leur existence, bien que menaçant l'avenir de l'humanité, ne joue qu'un rôle négligeable dans le maintien ou l'extinction de la réaction en chaîne. D'autre part, on peut appliquer aux différents neutrons une statistique tout à fait classique, car les événements dont ils sont issus (la fission d'un noyau) sont dépourvus de cohérence collective, de sorte qu'il n'y a pas interférence des amplitudes quantiques, mais superposition incohérente.

Dans un tel processus chaque neutron (particule-mère) donne après une fission un nombre *aléatoire* de nouveaux neutrons (particules-filles). Bien que ce soit purement théorique, on admettra que tout le processus a été initié par un seul premier neutron : cela revient à ne considérer que la descendance d'un seul neutron.

Remarque pour les physiciens : Pour chaque neutron de la réaction en chaîne, le nombre de générations depuis le tout premier neutron est parfaitement déterminé : en effet, d'après la relation d'incertitude phase – nombre $\Delta\varphi \times \Delta N \sim \hbar$, le nombre N de particules serait indéterminé si par exemple les particules étaient en phase, comme les photons d'un laser; or les neutrons de fission sont en général incohérents, c'est-à-dire que l'incertitude sur la phase est infinie, donc l'incertitude sur le nombre est nulle (il s'agit de l'incertitude de Heisenberg, non de l'incertitude subjective provenant de la difficulté pratique de mesurer ce nombre). C'est pour cette raison qu'on peut appliquer une statistique classique. Il y a donc un sens à parler de l'ensemble des neutrons de la n^{e} génération.

Par conséquent on peut introduire les variables aléatoires

$$Z_n = \text{nombre de neutrons de la } n^{\text{e}} \text{ génération}$$

Par ailleurs, il semble absurde que la fission d'un noyau puisse être influencée par les résultats des autres fissions⁽¹⁾; cela implique que la loi de probabilité du nombre de neutrons issus de chaque fission est toujours la même, à savoir la loi de Z_1 , et que ce nombre est stochastiquement indépendant pour chaque fission.

⁽¹⁾ Cela “semble absurde”, mais la Mécanique quantique nous a montré que de telles absurdités peuvent exister et ne sont donc pas absurdes. C'est pourquoi il faut considérer le postulat d'indépendance que nous faisons ici comme une simple hypothèse susceptible d'être réfutée par l'expérience, ou même dans certains cas par la théorie elle-même. La question est de savoir si les différentes fissions nucléaires d'une même réaction en chaîne sont *séparables*, au sens de la séparabilité quantique.

Considérons alors l'ensemble des neutrons de fission de la n^{e} génération, et numérotons les par la pensée de $j = 1$ à $j = Z_n$. Le j^{e} de ces neutrons donne un nombre aléatoire $X_j^{(n)}$ de particules-filles, et d'après les hypothèses ci-dessus les variables aléatoires $X_j^{(n)}$ sont stochastiquement indépendantes entre elles et ont toutes la même loi que Z_1 .

On en déduit que le nombre de neutrons de la $(n + 1)^{\text{e}}$ génération est

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{j=Z_n} X_j^{(n)}$$

Autrement dit, le nombre de neutrons d'une génération est la somme d'un nombre lui-même aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi, c'est-à-dire que nous sommes ramenés au problème $N^{\circ}2$. En appliquant simplement ce que nous avons trouvé alors, on voit que, si on appelle $G_n(z)$ la fonction génératrice de Z_n :

$$G_{n+1}(z) = G_n(G_1(z)) \quad ;$$

cela montre par récurrence que G_n est simplement la n^{e} itérée de G_1 :

$$G_n = G_1 \circ G_1 \circ G_1 \circ \cdots \circ G_1 \quad (n \text{ fois}) \quad (VIII.6.)$$

Étude d'un cas particulier

Il est parfois possible de calculer explicitement $G_n(z)$. Nous allons traiter un tel cas en détail, puis nous ferons une étude qualitative pour le cas général en nous inspirant de ce cas particulier.

Supposons que la loi de Z_1 soit la suivante :

$$\mathcal{P}(Z_1 = k) = \beta \alpha^k$$

où α et $\beta = 1 - \alpha$ sont donnés (cette loi, dite *loi géométrique*, est celle de Y dans le problème $N^{\circ}2$ lorsque $\alpha = \frac{5}{6}$ et $\beta = \frac{1}{6}$). Cette loi est peu réaliste en tant que modèle de réaction en chaîne de fission nucléaire, mais cela importe peu pour le moment. Proposons-nous de calculer *explicitement* la fonction G_n .

Il est toujours sous-entendu que les probabilités $\mathcal{P}(Z_1 = k) = \beta \alpha^k$ sont par nature approximatives et n'ont guère de signification pour des grandes valeurs de k ; donc la fonction génératrice est aussi approximative. D'un point de vue pratique il est en général bien rare que l'on ait à considérer des probabilités $\mathcal{P}(Z_1 = k)$ au-delà de $k = 4$, car elle sont alors plus petites que l'incertitude sur leurs valeurs. Mais dans le cas présent où nous supposons

une loi géométrique $\beta\alpha^k$, si on effectue formellement la somme de la série $\sum_k \mathcal{P}(Z_1 = k) z^k$ jusqu'à l'infini, on obtient une fonction simple (somme d'une série géométrique); si par contre, sous le prétexte que $\beta\alpha^k$ devient négligeable au-delà de, disons, $k = 10$, on n'effectuait la somme de la série que jusqu'à $k = 10$, on obtiendrait un polynôme de degré 10 beaucoup moins maniable que la fonction homographique, qui ne serait a priori ni plus exact, ni moins exact que la fonction simple. C'est pourquoi il est avantageux de sommer jusqu'à l'infini, non parce que la somme infinie est plus exacte, mais parce qu'elle est plus commode. La fonction simple est alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta\alpha^k z^k = \frac{\beta}{1 - \alpha z} = G_1(z)$$

Cette fonction homographique a en outre l'avantage d'être facile à itérer : la composition de deux ou plusieurs fonctions homographiques est également une fonction homographique (c'est la raison pour laquelle nous avons choisi la loi géométrique).

Un calcul sans surprise donne pour les premières itérées les résultats suivants :

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \beta \frac{1 - \alpha z}{(1 - \alpha\beta) - \alpha z} \\ G_3(z) &= \beta \frac{(1 - \alpha\beta) - \alpha z}{(1 - 2\alpha\beta) - (1 - \alpha\beta)\alpha z} \\ G_4(z) &= \beta \frac{(1 - 2\alpha\beta) - (1 - \alpha\beta)\alpha z}{(1 - 3\alpha\beta + \alpha^2\beta^2) - (1 - 2\alpha\beta)\alpha z} \end{aligned}$$

Sur ces expressions, on remarque un certain nombre de régularités. Par exemple, le dénominateur de chacune est égal au numérateur de la précédente. En observant encore mieux, on voit aussi que, à l'intérieur des numérateurs ou des dénominateurs, le premier terme est toujours en avance d'un rang sur le coefficient de αz . On devine donc une récurrence sous la forme

$$G_n(z) = \beta \frac{a_{n+1} - \alpha a_n z}{a_{n+2} - \alpha a_{n+1} z}$$

où a_n est une certaine suite numérique. En identifiant les coefficients dans la relation de récurrence $G_{n+1} = G_n \circ G_1$, on constatera que cette suite est elle-même définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \alpha\beta a_{n-1} \\ a_1 &= 0 ; \quad a_2 = 1 ; \end{aligned}$$

Mais on peut encore simplifier davantage : dans une fonction homographique $(a + bz) / (c + dz)$, les quatre coefficients a, b, c, d ne sont pas univoques ; on peut simplifier l'expression ci-dessus de $G_n(z)$ en divisant le numérateur et le dénominateur par a_{n+1} , ce qui donne

$$G_n(z) = \beta \frac{1 - \alpha \frac{a_n}{a_{n+1}} z}{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \alpha z}$$

Si alors on introduit la nouvelle suite numérique $b_n = a_n/a_{n+1}$, cela s'écrit

$$G_n(z) = \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{\frac{1}{b_{n+1}} - \alpha z} = \beta b_{n+1} \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha b_{n+1} z} \quad (VIII.7.)$$

et la nouvelle suite numérique b_n est caractérisée par la récurrence

$$b_{n+1} = \frac{1}{1 - \alpha \beta b_n} \quad (b_1 = 0) \quad (VIII.8.)$$

qu'on déduit de la relation de récurrence des a_n en divisant ses deux membres par a_n .

Une petite étude rapide de la suite b_n sera utile. On peut montrer qu'elle est croissante, que si $\alpha > \frac{1}{2}$ elle tend vers $1/\alpha$, et si $\alpha < \frac{1}{2}$ elle tend vers $1/\beta$. En effet, on vérifie par récurrence que l'on a toujours

$$1 < b_n < \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad 1 < b_n < \frac{1}{\beta}$$

par ailleurs on peut écrire

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{1 - \alpha \beta b_n} - b_n = \frac{1 - b_n + \alpha \beta b_n^2}{1 - \alpha \beta b_n} \\ &= \frac{(1 - \alpha b_n)(1 - \alpha b_n)}{1 - \alpha \beta b_n} = b_{n+1}(1 - \alpha b_n)(1 - \alpha b_n) \end{aligned}$$

où on voit que le second membre est, d'après ce qui précède, toujours positif. Cette dernière égalité montre aussi que la limite ne peut être que $\frac{1}{\alpha}$ ou $\frac{1}{\beta}$; du fait que la suite est croissante et démarre à 0 et 1, la limite est nécessairement le plus petit de ces deux nombres.

Pour obtenir la loi de Z_n il faut maintenant développer la fonction génératrice $G_n(z)$ en puissances de z :

$$G_n(z) = \beta b_{n+1} \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha b_{n+1} z}$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n z) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k \\
 &= \beta b_{n+1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha b_n (\alpha b_{n+1})^k z^{k+1} \right\} \\
 &= \beta b_{n+1} + \beta [b_{n+1} - b_n] \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha b_{n+1} z)^k
 \end{aligned}$$

On en déduit la loi de probabilité de Z_n :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } k = 0 : \quad \mathcal{P}(Z_n = 0) &= \beta b_{n+1} \\
 \text{pour } k \geq 1 : \quad \mathcal{P}(Z_n = k) &= \beta [b_{n+1} - b_n] (\alpha b_{n+1})^k \\
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n) (1 - \beta b_n) (\alpha b_{n+1})^k
 \end{aligned}$$

Les valeurs de $\mathcal{P}(Z_n = k)$ pour *chaque* k sont peu parlantes et on voit mieux ce qui se passe avec $\mathcal{P}(Z_n \geq k)$; or ceci s'obtient aisément :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(Z_n \geq k) &= \sum_{\ell \geq k}^{\infty} \mathcal{P}(Z_n = \ell) \\
 &= \beta b_{n+1} (1 - \alpha b_n) (1 - \beta b_n) \frac{(\alpha b_{n+1})^k}{1 - \alpha b_{n+1}} \\
 &= (1 - \beta b_n) (\alpha b_{n+1})^k
 \end{aligned}$$

On voit que cette valeur décroît exponentiellement avec k . Lorsque n est grand, cette décroissance est très lente si $\alpha > \frac{1}{2}$, car alors $\alpha b_{n+1} \simeq 1$; elle est par contre rapide si α est nettement inférieur à $\frac{1}{2}$, car alors $\alpha b_{n+1} \simeq \frac{\alpha}{\beta}$, ce qui est nettement inférieur à 1. Dans ce second cas, cependant, on voit que $\mathcal{P}(Z_n = 0) = \beta b_{n+1} \simeq 1$, ce qui signifie que la probabilité pour que la réaction en chaîne se soit éteinte est pratiquement égale à 1 (la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini est 1). Dans le premier cas, où $\alpha > \frac{1}{2}$, on voit que la probabilité pour que la réaction en chaîne soit éteinte à la n^{e} génération tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$ (qui est strictement inférieur à 1) lorsque n tend vers l'infini, mais les probabilités pour qu'il y ait 1, 2, 3, ..., k neutrons décroissent très lentement avec k (elles sont pratiquement équiprobables tant que $k \ll [\frac{\alpha}{\beta}]^n$).

Sur cet exemple le calcul détaillé nous a permis d'obtenir explicitement, sous forme analytique, la loi de Z_n . Les propriétés intéressantes sont toutefois surtout les suivantes :

— quand n tend vers l'infini, la limite de $\mathcal{P}(Z_n = 0)$ est $\frac{\alpha}{\beta}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ et 1 si $\alpha \leq \frac{1}{2}$; cela signifie que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la réaction finira *certainement* par

s'éteindre, et que si $\alpha > \frac{1}{2}$ il y a toujours une probabilité non nulle pour qu'elle finisse par s'éteindre.

— dans le cas où la probabilité d'extinction ne tend pas vers 1, peu importe le détail de la loi, mais on constate que celle-ci est exponentielle (géométrique) et très étalée.

En général, lorsque $G_1(z)$ est quelconque, il est impossible d'effectuer des calculs analytiques explicites. Mais nous allons voir que les renseignements *intéressants* peuvent être déduits quand même : ce sera le sujet de la section suivante ("Étude du cas général"). Nous y établirons que *quelle que soit la loi de Z_1* , il n'y a que deux possibilités : si $\mathbf{E}(Z_1) \leq 1$ la probabilité pour que $Z_n = 0$ tend vers 1 et si $\mathbf{E}(Z_1) > 1$ il y a une probabilité non nulle que la réaction se poursuive éternellement. En outre, s'il est impossible de calculer explicitement la loi exacte et complète de Z_n , on peut du moins calculer explicitement $\mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{Var}(Z_n)$. Nous verrons qu'on peut même dans certains cas déterminer sa densité. Autrement dit, quoique le calcul détaillé soit impossible, tout ce qu'on pouvait déduire d'intéressant à partir du calcul détaillé peut aussi être obtenu par une autre voie.

La fonction génératrice $G(z)$ d'une loi de probabilité n'est pas une fonction arbitraire; lorsqu'on la développe selon les puissances de z , les coefficients sont des probabilités, donc ils ne sont jamais négatifs, et en outre leur somme est égale à 1. Cela a pour conséquence que si $0 < x \leq 1$, $G(x)$ et ses dérivées successives au point $z = x$ sont toutes positives. Cela se voit très facilement. Soit $G^{(j)}(x)$ la j^{e} dérivée de $G(z)$ au point $z = x$; on a

$$G^{(j)}(x) = \sum_{k \geq j} k(k-1)(k-2) \cdots (k-j+1) p_k x^{k-j}$$

dans cette somme tous les termes sont positifs donc la somme est positive; en outre dans le cas où pour simplifier on souhaite sommer jusqu'à l'infini il n'y a pas de problème de convergence puisque nous avons supposé $x \leq 1$. Or une fonction $G(x)$ dont toutes les dérivées sont positives est nécessairement croissante et convexe; donc une droite ne peut pas couper son graphe en plus de deux points. L'équation $G(x) = x$ a au plus deux racines. Mais $x = 1$ est une racine évidente. On peut comprendre aisément que si $G'(1) > 1$ il existe une deuxième racine x_0 telle que $0 < x_0 < 1$. Par contre si $G'(1) < 1$, il ne peut pas exister entre 0 et 1 d'autre racine que 1. La convexité de $G(x)$ a en outre la conséquence que si $0 < x < 1$, la suite des itérées $G^n(x)$ tend vers la racine x_0 si $G'(x) > 1$ et vers la racine 1 si $G'(x) \leq 1$. Voir la figure 18.

Dans l'exemple que nous avons traité en détail, ces phénomènes se

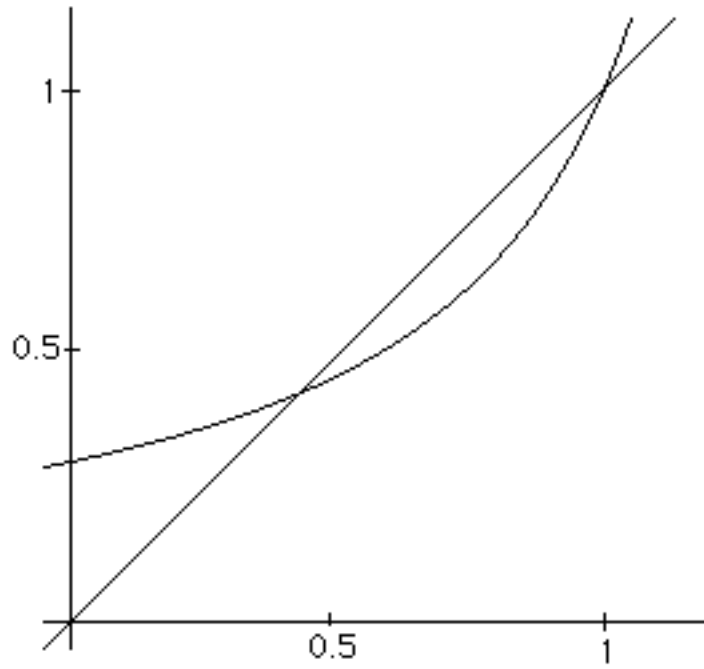


figure 18.

produisaient. La fonction $G(z)$ était $\beta/(1 - \alpha z)$ et sa dérivée était donc $G'(z) = \alpha\beta/(1 - \alpha z)^2$, d'où $G'(1) = \alpha/\beta$. La condition qui était nécessaire pour que la probabilité d'extinction ne tende pas vers 1 était que $\alpha > \frac{1}{2}$, ou, ce qui est équivalent, que $\alpha > \beta$, c'est-à-dire $G'(1) > 1$. Dans ce cas, le calcul nous avait montré que la suite b_n tendait vers $\frac{1}{\alpha}$, et par conséquent $G_n(z) = \beta b_{n+1} (1 - b_n \alpha z) / (1 - b_{n+1} \alpha z)$ (cf. VIII.7) devait avoir pour limite β/α lorsque n tend vers l'infini; or la racine x_0 de l'équation $G(x) = x$ est dans ce cas précisément égale à cette valeur.

Il est possible de trouver, à partir de la récurrence (VIII.8), une expression analytique explicite de la suite b_n en fonction de n . Pour cela, introduisons $x_n = 1 - \alpha b_n$; puisque b_n tend vers $1/\alpha$, il est clair que x_n tend vers 0. En outre, puisque b_n tend vers $1/\alpha$ *en croissant*, les x_n sont toujours positifs. On déduit immédiatement la récurrence des x_n de celle des b_n :

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n}{\alpha + \beta x_n}$$

On voit que lorsque x_n est petit (donc pour n assez grand), le terme βx_n au dénominateur est négligeable devant α , de sorte que $x_{n+1} \simeq \frac{\beta}{\alpha} x_n$. Cela montre que la décroissance de la suite x_n est de type exponentiel, de raison

$\frac{\beta}{\alpha}$; c'est-à-dire qu'on s'attend à ce que pour n grand, $x_n \sim (\frac{\beta}{\alpha})^n$. Posons alors

$$y_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n x_n$$

La récurrence entre les y_n est maintenant

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{\alpha + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \alpha y_n} = \frac{1}{\frac{1}{y_n} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}$$

ou encore, en considérant la suite des inverses $u_n = \frac{1}{y_n}$:

$$u_{n+1} = u_n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}$$

Pour amorcer la récurrence, il faut connaître u_1 , ce qui s'obtient immédiatement: $b_1 = 0$, donc $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, et $u_1 = \frac{\beta}{\alpha}$. Par conséquent u_n peut s'exprimer directement en fonction de n :

$$u_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

En revenant en arrière, on obtient alors pour x_n et b_n :

$$x_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \quad b_n = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

Revenons à l'expression (VIII.7) de $G_n(z)$ qui avait été obtenue plus haut à l'aide des b_n .

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{\frac{1}{b_{n+1}} - \alpha z} \\ &= \beta \frac{1 - \alpha b_n z}{1 - \alpha \beta b_n - \alpha z} \quad (VIII.9.) \\ &= 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n)w}{\alpha w + \beta x_n} \end{aligned}$$

où l'on a introduit $w = 1 - z$. Lorsque x_n tend vers zéro (c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini), la limite de cette dernière expression n'est pas une bonne fonction analytique de w ; en effet, si $w = 0$, cela tend vers 1, mais dès que $w \neq 0$, cela tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$. Bien entendu, tant que n n'est pas infini,

il y a continuité: lorsque w s'écarte de zéro (c'est-à-dire lorsque z s'écarte de 1), l'expression ci-dessus passe continuellement de la valeur 1 à la valeur $\frac{\beta}{\alpha}$. Mais plus n est grand, plus ce passage est rapide. Il se produit le phénomène suivant: pour $w = 0$, $G(1-w) = 1$, et lorsque $|w| \gg (\frac{\beta}{\alpha})^n$, $G(1-w) \simeq \frac{\beta}{\alpha}$. Le saut brusque de 1 à $\frac{\beta}{\alpha}$ se produit sur une plage de valeurs pour $|w|$ qui est de l'ordre de $(\frac{\beta}{\alpha})^n$, ce qui, lorsque n est grand, est une très courte distance.

Le phénomène qui se produit là est analogue à celui du chapitre VII. Nous avons vu à cette occasion que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ étaient des variables aléatoires stochastiquement indépendantes, alors la loi de $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ avait une fonction caractéristique $\Phi_n(t)$ proche de e^{-at^2} ; mais il a fallu pour cela diviser la somme $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ par $\sqrt{n}$; la fonction caractéristique de la somme *non divisée* par $\sqrt{n}$ est e^{-ant^2} et non e^{-at^2} . Lorsque n tend vers l'infini, il arrive donc également que la fonction caractéristique de la somme non divisée tende vers 1 lorsque $t = 0$, et vers zéro lorsque $t \neq 0$: c'est le même type de discontinuité. Lorsque n n'est pas infini, mais grand, le passage de 1 à 0 est continu, mais rapide, comme le montre la fonction e^{-ant^2} : le passage se fait sur une étroite plage de valeurs, de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. On faisait donc apparaître la forme gaussienne e^{-at^2} de ce passage de 1 à 0 en effectuant un changement d'échelle: on "agrandissait" dans un rapport $\sqrt{n}$ l'intervalle autour de $t = 0$ où ce changement se produit.

Le phénomène que nous étudions maintenant étant analogue, il est judicieux d'effectuer également un changement d'échelle, cette fois de rapport $(\frac{\alpha}{\beta})^n$. Ainsi, pour agrandir le voisinage de $w = 0$ dans ce rapport, nous poserons $\zeta = (\frac{\alpha}{\beta})^n w$. En fonction de cette nouvelle variable, l'expression (VIII.9) de $G_n(z)$ devient

$$G_n(z) = 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n)(\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta}{\alpha(\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta + \beta x_n}$$

Or le rapport $(\frac{\beta}{\alpha})^n$ se factorise aussi bien au numérateur qu'au dénominateur, de sorte qu'après simplification il reste:

$$G_n(z) = 1 + \frac{(\beta - \alpha - \beta x_n) \zeta}{\alpha \zeta + \beta \frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1}}}$$

Cette expression est entièrement explicite: $G_n(z)$ y est exprimé analytiquement en fonction de α , ζ , et n , sans recourir à aucun intermédiaire qui ne serait connu que par une relation de récurrence. En y faisant tendre n vers l'infini, tout en laissant α et ζ fixés, on voit que cela tend vers une limite,

qui est égale à $1 + Q(\zeta)$, où $Q(\zeta)$ est la fonction :

$$Q(\zeta) = \frac{(\alpha - \beta) \zeta}{\beta - \alpha \zeta} \quad (VIII.10.)$$

Mais il faut bien comprendre qu'il s'agit là de la limite *lorsque ζ reste fixé*. Car $z = 1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n \zeta$, de sorte que z varie avec n et n'est pas fixé : si ζ est fixé, z tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, et n'est donc pas lui-même fixé. Inversement, si on fait tendre n vers l'infini *en maintenant z , et non ζ fixé*, la limite sera toute différente : ce sera, comme nous l'avons vu, 1 si $z = 1$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ si $z \neq 1$. En termes de valeurs approchées, cela signifie simplement que pour n grand, $G(z)$ est une fonction égale à $\frac{\beta}{\alpha}$ partout excepté dans un petit voisinage (de diamètre environ $[\frac{\beta}{\alpha}]^n$) autour de $z = 1$, tandis qu'à l'intérieur de ce voisinage, *si on agrandit celui-ci* dans le rapport $(\frac{\beta}{\alpha})^n$, la fonction $G(z)$ est approximativement égale à $1 + Q(\zeta)$. Ce que nous avons donc effectué par le passage de la variable z à la variable ζ est *un changement d'échelle*. Pour n grand, la fonction caractéristique de Z_n est $\Phi_n(t) \simeq 1 + Q([\frac{\beta}{\alpha}]^{-n} (1 - e^{it}))$, qui est presque partout proche de β/α (la probabilité pour que $Z_n = 0$), et ne diffère sensiblement de β/α que dans un intervalle minuscule, dont la largeur est de l'ordre de $[\frac{\beta}{\alpha}]^n$, autour de $t = 0$. Mais toute l'information sur la densité de probabilité des valeurs de Z_n autres que zéro est précisément concentrée dans les variations de $\Phi_n(t)$ à l'intérieur de ce petit intervalle, et le changement d'échelle permet de mieux les voir.

Étude du cas général.

Tout ce que nous venons de voir sur l'exemple, a une valeur générale ; sauf, évidemment, qu'en général on ne peut pas effectuer analytiquement tous les calculs, et qu'on doit alors se contenter de calculs numériques (mais nous allons voir qu'on peut disposer pour cela d'algorithmes simples et efficaces).

Pour commencer, nous allons établir que la fonction $Q(\zeta)$ existe en général, et non seulement dans le cas particulier de l'exemple ; nous verrons également un algorithme simple pour la calculer. Tout cela résulte, comme nous allons voir, du fait qu'une fonction génératrice n'est pas une fonction analytique quelconque, mais possède des propriétés très particulières, notamment le fait — signalé plus haut — que pour x réel et compris entre 0 et 1, toutes les dérivées de $G(z)$ en $z = x$ sont positives.

La première conséquence de cette propriété est (comme nous l'avons déjà vu) l'existence d'une solution $x = r$ unique de l'équation $G(x) = x$ pour $0 < x < 1$ lorsque $G'(1) > 1$. Il faut noter que $G'(1)$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z_1 : la condition $G'(1) > 1$ signifie

donc que chaque particule-mère engendre *en moyenne* plus qu'une particule-fille (la moyenne n'est évidemment pas forcément un nombre entier).

La raison de l'existence de cette solution r est que la fonction $G(x)$ est croissante et convexe sur l'intervalle $[0, 1]$. Un raisonnement élémentaire, qui saute aux yeux en voyant la figure 18, montre qu'il doit en être ainsi si $G'(1) > 1$. On peut signaler les cas dégénérés : si $G(0) = 0$, r devient simplement 0 ; si $G(z) = z$, il y a une infinité de solutions, mais ce cas est exclu puisque nous supposons $G'(1) > 1$.

Le raisonnement simple qui se déduit de la figure 18 est valable pour la fonction $G(x)$ de la variable réelle x ; son évidence géométrique ne permet pas de s'assurer qu'il n'existerait pas de solution complexe de l'équation $G(z) = z$. Mais cela peut être démontré autrement, toujours en utilisant les propriétés particulières des fonctions génératrices. En effet, la série $\sum p_k z^k$ qui définit $G(z)$ converge pour $|z| < 1$, donc on peut écrire pour n'importe quel nombre complexe z de module < 1 :

$$G(z) - r = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z^k - r^k) = (z - r) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} r^j \right]$$

on a simplement utilisé l'identité $z^k - r^k = (z - r) \sum z^{k-1-j} r^j$. Passant aux modules, cela donne l'inégalité

$$\begin{aligned} |G(z) - r| &\leq |z - r| \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} |z|^{k-1-j} r^j \right] \\ &= |z - r| \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{|z|^k - r^k}{|z| - r} \right] \\ &= |z - r| \frac{G(|z|) - G(r)}{|z| - r} \end{aligned}$$

Or si $|z| < 1$, $(G(|z|) - G(r))/(|z| - r) = \rho$ est également < 1 à cause de la convexité de $G(x)$ ($|z|$ et r sont réels).

On obtient alors ceci : si $|z| < 1$, $|G(z) - r| \leq \rho |z - r|$ avec $\rho < 1$. Il est donc impossible que $G(z) = z$, sauf si $z = r$. Donc $z = r$ est la seule racine de l'équation $G(z) = z$ à l'intérieur du disque $|z| \leq 1$. Cela signifie que s'il existe d'autres racines, celles-ci sont soit sur le cercle $|z| = 1$, soit à l'extérieur de ce cercle.

La fonction génératrice G_n de Z_n étant la n^e itérée de G , on peut aussi déduire de cette inégalité que pour $|z| < 1$

$$|G_n(z) - r| \leq \rho^n |z - r|$$

qui montre que si $|z| < 1$, $G_n(z)$ tend vers r quand n tend vers l'infini, d'autant plus rapidement que ρ est plus petit. Il en va de même si $|z| = 1$ et $|G(z)| < 1$, car alors on peut écrire

$$|G_n(z) - r| \leq \rho^{n-1} |G(z) - r|$$

Encore plus généralement : il suffit que l'une quelconque des itérées $G_j(z)$ soit de module inférieur à 1. Si $|z| \leq 1$, le seul cas où $G_n(z)$ ne tend pas vers r est celui où $|z| = 1$ et où pour toutes les itérées G_j , $|G_j(z)| = 1$.

Dans l'exemple particulier traité précédemment, le nombre $z = 1$ était le seul, parmi les nombres de module 1, pour lequel $G(z)$ est lui aussi de module 1 ; donc pour tous les z tels que $|z| \leq 1$, excepté $z = 1$, $G_n(z)$ tendait vers $r = \frac{\beta}{\alpha}$, de sorte que la limite de $G_n(z)$ pour n tendant vers l'infini était une fonction discontinue. Mais en effectuant une homothétie de centre $z = 1$ et de rapport a^n , c'est-à-dire un changement d'échelle, avec $a = G'(1) = \mathbf{E}(Z_1)$ (dans l'exemple a était égal à α/β), on avait fait apparaître la fonction limite $Q(\zeta)$, qui est non seulement continue, mais analytique. Si on veut construire une telle fonction limite dans le cas général où $G(z)$ est une fonction génératrice quelconque, il faut, pour que l'homothétie de centre $z = 1$ puisse être introduite, que l'on développe les fonctions G_n en série entière au voisinage de $z = 1$ et non au voisinage de $z = 0$; c'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans l'exemple pour mettre en évidence la fonction $Q(\zeta)$.

Posons donc $w = z - 1$ et $F(w) = G(1 + w) - 1$. Il est clair que $F(0) = 0$ et que la n^e itérée de F est $F_n(w) = G_n(1 + w) - 1$: en effet, si on suppose que c'est vrai pour n , on a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(w) &= F(F_n(w)) = G(1 + F_n(w)) - 1 \\ &= G(G_n(1 + w)) - 1 = G_{n+1}(1 + w) - 1 \end{aligned}$$

La fonction $Q(\zeta)$ doit alors être la limite des fonctions $Q_n(\zeta)$ définies par :

$$Q_n(\zeta) = F_n(a^{-n}\zeta)$$

Le problème est de montrer que cette limite existe (c'est-à-dire que la suite $Q_n(\zeta)$ n'est pas divergente), qu'elle est une fonction continue et analytique de la variable complexe ζ , et éventuellement de pouvoir calculer sa série entière. Si ce travail est effectué, alors on pourra dire que pour n grand, $G_n(z)$ est approximativement égale à $1 + Q(a^n w)$; ou encore, que la fonction caractéristique de Z_n est donnée approximativement par

$$\Phi_n(t) \simeq 1 + Q(a^n(e^{it} - 1))$$

Si au lieu de considérer la fonction caractéristique de Z_n , on considère plutôt celle de Z_n/a^n , qui n'est autre que $\Phi_n(t/a^n)$, on obtient alors l'expression particulièrement simple :

$$\Phi_n(t/a^n) \simeq 1 + Q(it)$$

car lorsque n tend vers l'infini, $a^n(e^{i(t/a^n)} - 1)$ tend vers it .

Cette approximation de la fonction caractéristique est d'autant plus correcte que n est plus grand et que ζ , ou t , est plus petit ; en particulier, elle n'est plus valable si ζ , ou t , est très grand. Comme nous l'avons déjà constaté au chapitre **VII**, cela signifie que l'approximation ci-dessus est un filtre passe-bas qui élimine le *bruit discret* de la loi de Z_n mais qui conserve toute l'information sur la *densité* de cette loi. L'étude détaillée de l'exemple avait montré que la loi de Z_n était faite d'une probabilité appréciable pour que $Z_n = 0$, et d'un nuage très étendu de valeurs non nulles, ayant chacune une probabilité infinitésimale ; or l'information utile est constituée de :

- la probabilité de $Z_n = 0$;
- la densité de probabilité des autres valeurs.

Le *détail* de la loi discrète, à savoir les probabilités exactes des valeurs non nulles de Z_n , n'est pas une information utile. Par conséquent, la fonction $Q(\zeta)$ contient exactement l'information utile et est débarrassée de l'information inutile. L'approximation ci-dessus est donc meilleure que la fonction caractéristique exacte $\Phi_n(t/a^n)$. On ne devrait pas dire que $1+Q(it)$ est une approximation de $\Phi_n(t/a^n)$, mais que $\Phi_n(t/a^n)$ est une complication de $1 + Q(it)$.

Pour étudier la fonction $Q(\zeta)$ et montrer qu'elle est analytique, il serait commode d'avoir une relation de récurrence sur les $Q_n(\zeta)$. Or, cela est facile à obtenir, car on a la récurrence sur les $F_n(w)$:

$$F_{n+1}(w) = F(F_n(w))$$

en prenant $\zeta = a^n w$ cela donne

$$F_{n+1}(a^{-n}\zeta) = F(F_n(a^{-n}\zeta))$$

qui est équivalent à

$$Q_{n+1}(a\zeta) = F(Q_n(\zeta))$$

Cette relation est précieuse : c'est une relation de récurrence qui permet de calculer effectivement la suite des $Q_n(\zeta)$, à partir de $Q_0(\zeta) = \zeta$. Si on fait tendre n vers l'infini dans les deux membres de la relation, on obtient

$$Q(a\zeta) = F(Q(\zeta)) \quad (VIII.11.)$$

puisque si les deux membres sont égaux pour tout n , leurs limites sont égales aussi (notez bien que si la limite de $F(Q_n(\zeta))$ est $F(Q(\zeta))$, c'est parce que la fonction $F(w)$ est continue). Toutefois cette déduction est incorrecte s'il n'y a pas de limite, ou si la fonction $F(w)$ a des discontinuités. Or la fonction $G(z)$ est certes analytique au moins dans le disque $|z| < 1$, mais peut avoir des pôles ou des singularités logarithmiques ou essentielles en dehors de ce disque; la continuité de $F(w)$ n'est assurée que dans le domaine où elle est analytique: il faut donc que ζ soit tel que *tous* les $Q_n(\zeta)$ soient dans ce domaine d'analyticité. Ces remarques montrent déjà que le problème de l'existence d'une limite doit être traité sérieusement. Nous nous occuperons de cela un peu plus loin, voyons déjà ce que le résultat permet de faire.

Pour obtenir la série entière de $Q(\zeta)$, il suffit de la substituer à w dans la série connue de $F(w)$, puis d'identifier les coefficients. Soit donc

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

la série connue; ses coefficients a_n se déduisent des coefficients p_n de $G(z)$ par la relation

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= a = \mathbf{E}(Z_1) \\ a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p_k \quad \text{si } n \geq 2 \end{aligned}$$

On voit qu'ils sont tous positifs. Soit d'autre part la série inconnue:

$$Q(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \zeta^j \quad (VIII.12.)$$

En substituant la série (VIII.12) dans l'égalité (VIII.11):

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k a^k \zeta^k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^n$$

On ne peut développer les puissances n -ièmes des séries complètes lorsque n est trop grand, mais on peut développer aux ordres les plus bas; ainsi, si on ne retient que les termes de degré au plus cinq, on obtient:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^2 &= c_1^2 \zeta^2 + 2c_1 c_2 \zeta^3 + (c_2^2 + 2c_1 c_3) \zeta^4 + (2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) \zeta^5 + \dots \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^3 &= c_1^3 \zeta^3 + 3c_1^2 c_2 \zeta^4 + (3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \zeta^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^4 = c_1^4 \zeta^4 + 4c_1^3 c_2 \zeta^5 + \dots$$

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^j \right]^5 = c_1^5 \zeta^5 + \dots$$

En identifiant ensuite les coefficients des deux séries, celle de $Q(a\zeta)$ et celle de $F(Q(\zeta))$, on obtient :

$$\begin{aligned} ac_1 &= a_1 c_1 \\ a^2 c_2 &= a_1 c_2 + a_2 c_1^2 \\ a^3 c_3 &= a_1 c_3 + 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3 \\ a^4 c_4 &= a_1 c_4 + a_2(c_2^2 + 2c_1 c_3) + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4 \\ a^5 c_5 &= a_1 c_5 + a_2(2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) + a_3(3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \\ &\quad + a_4(c_1^3 c_2 + 3c_1^2 c_2) + a_5 c_1^5 \end{aligned}$$

La première équation est indéterminée, on prendra donc $c_1 = 1$. La deuxième donne $c_2 = a_2/(a^2 - a)$. On voit qu'il s'agit d'un système de cinq équations linéaires à cinq inconnues, et ce système est triangulaire donc de résolution aisée :

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= a_2/(a^2 - a) \\ c_3 &= [2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3]/(a^3 - a) \\ c_4 &= [a_2(c_2^2 + 2c_1 c_3) + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4]/(a^4 - a) \\ c_5 &= [a_2(2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) + a_3(3c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2) \\ &\quad + a_4(c_1^3 c_2 + 3c_1^2 c_2) + a_5 c_1^5]/(a^5 - a) \end{aligned} \tag{VIII.13.}$$

c'est-à-dire que chaque c_j se calcule aisément à partir des coefficients $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{j-1}$ précédemment calculés.

On peut ainsi obtenir un développement limité de $Q(\zeta)$ à n'importe quel ordre, et par conséquent aussi pour la fonction caractéristique approchée $1 + Q(it)$. Cela permet déjà de calculer $1 + Q(it)$ pour des valeurs assez petites de t .

On voit que tout cela mène à des algorithmes pour un calcul effectif de la fonction caractéristique approchée. Comme au chapitre **VII**, on pourra alors déduire (par des opérations de filtrage et de transformations de Fourier) des informations sur la densité de la variable aléatoire Z_n pour n grand.

Toutefois ces possibilités de calcul effectif présupposent que la suite $Q_n(\zeta)$ converge vers une limite. Nous allons maintenant nous occuper de vérifier

que c'est bien le cas, en précisant le domaine auquel doit appartenir ζ pour qu'il en soit ainsi. La méthode est classique : il revient au même de dire que la suite $Q_n(\zeta)$ a une limite, ou que la série $\sum [Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)]$ est convergente. Et pour montrer que la série est convergente, nous la majorerons par une série géométrique.

Il s'agit donc d'étudier la différence $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$. Pour cela, il faut d'abord en savoir plus sur $F_n(w)$.

Un développement limité de $F(w)$ à l'ordre 2 est de la forme $F(w) \simeq aw + a_2w^2$; si on itère cela en ne retenant que les termes en w et w^2 , on trouve :

$$\begin{aligned} F(w) &\simeq aw + a_2w^2 \\ F_2(w) &\simeq a^2w + a_2(a + a^2)w^2 \\ F_3(w) &\simeq a^3w + a_2(a^2 + a^3 + a^4)w^2 \\ F_4(w) &\simeq a^4w + a_2(a^3 + a^4 + a^5 + a^6)w^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

donc on devine la récurrence

$$\begin{aligned} F_n(w) &\simeq a^n w + a_2(a^{n-1} + a^n + a^{n+1} + \dots + a^{2n-2})w^2 \\ &= a^n w + a_2 a^{n-1} \frac{a^n - 1}{a - 1} w^2 \end{aligned}$$

qui se confirme aisément. Puisque $Q_n(\zeta) = F_n(\zeta/a^n)$, on en déduit que le développement à l'ordre 2 de la fonction $Q_n(\zeta)$ est

$$Q_n(\zeta) \simeq \zeta + \frac{a_2}{a-1} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \zeta^2$$

et par conséquent

$$Q_n(\zeta) - Q_{n-1}(\zeta) \simeq \frac{a_2}{a-1} \cdot \left[\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \zeta^2$$

Donc il semble raisonnable de conjecturer que l'on doit avoir une inégalité du type

$$|Q_n(\zeta) - Q_{n-1}(\zeta)| \leq K(|\zeta|) \left[\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} \right] \quad (VIII.14.)$$

où $K(x)$ est une certaine fonction positive de x , équivalente à $x^2 a_2 / (a-1)$ lorsque x tend vers zéro, mais indépendante de n . Si on arrivait à montrer

cette conjecture, on en déduirait immédiatement que la suite $Q_n(\zeta)$ converge pour tout ζ .

Or nous allons voir que tout dépend de la courbe $y = G(x)$ telle qu'elle est représentée sur la figure 18. Nous avons déjà utilisé plus haut la propriété que la fonction génératrice est non seulement un polynôme ou une fonction analytique, mais que les coefficients de son développement de Taylor sont tous positifs. Cela avait pour conséquence que pour z complexe on pouvait toujours écrire $|G(z)| \leq G(|z|)$. Pour x réel (donc en ce qui concerne les propriétés géométriques visibles sur la figure), la courbe est convexe, c'est-à-dire qu'elle est toujours *au-dessus* de sa tangente. Par exemple au point $x = 1$, la tangente à la courbe est la droite d'équation $y - 1 = a(x - 1)$. La convexité entraîne que $G(1 + t) - 1 - at \geq 0$ pour tout t réel. En outre, la courbe s'écarte plus ou moins lentement de sa tangente selon que la courbure de la courbe est plus ou moins prononcée.

Le cas particulier que nous avons traité précédemment en détail avait le privilège que la fonction génératrice y était une fonction homographique ; les fonctions homographiques sont particulièrement faciles à itérer : en itérant un nombre quelconque de fois une fonction homographique, on a toujours une fonction homographique ; alors qu'en itérant un polynôme, même aussi simple que $x^2 + x$, on obtient des polynômes de plus en plus en plus complexes, car le degré double à chaque itération.

Pour montrer la convergence de la suite des fonctions $Q_n(\zeta)$, nous allons montrer que la *série* de terme général $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$ est convergente (du moins pour ζ assez petit), en la majorant par une série géométrique. Si la suite des fonctions $Q_n(\zeta)$ converge dans un disque $|\zeta| < \rho$, aussi petit soit-il, le principe du prolongement analytique fera le reste. En effet, il nous faut simplement légitimer les calculs effectués plus haut en vue d'obtenir le début de la série entière de $Q(\zeta)$, et pour cela un disque, même petit, suffit. Mais pour majorer $Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)$, il nous faut des encadrements *itérables*. Nous avons déjà la minoration $F(t) \geq at$ (pour t réel), due à la convexité, qui par itération donne $F_n(t) \geq a^n t$, si on appelle $F_n = F \circ F \circ F \cdots \circ F$ la n^e itérée de F . Pour avoir une majoration il est indiqué d'utiliser une fonction homographique plutôt qu'un polynôme : on peut choisir un coefficient α tel que

$$F(t) \leq \frac{at}{1 - \alpha t}$$

de telle sorte que par itération on obtienne des inégalités de la forme

$$F_n(t) \leq \frac{\beta_n t}{1 - \alpha_n t}$$

En *effectuant* les itérations on constate que β_n doit être égal à a^n , et pour les α_n on trouve des expressions compliquées, mais qui peuvent être majorées par $\alpha a^n/(a-1)$, de sorte que tout peut être résumé par

$$F_n(t) \leq \frac{a^n t}{1 - \frac{\alpha a^n t}{a-1}} \quad (VIII.15.)$$

L'encadrement de $F_n(t)$ ainsi obtenu (voir figure 19) permettra de montrer que la suite $Q_n(\zeta) = F_n(\zeta/a^n)$ converge, ce qui légitimera les calculs heuristiques que nous avons effectués plus haut pour obtenir des développements limités et autres algorithmes pour le calcul de $Q(\zeta)$

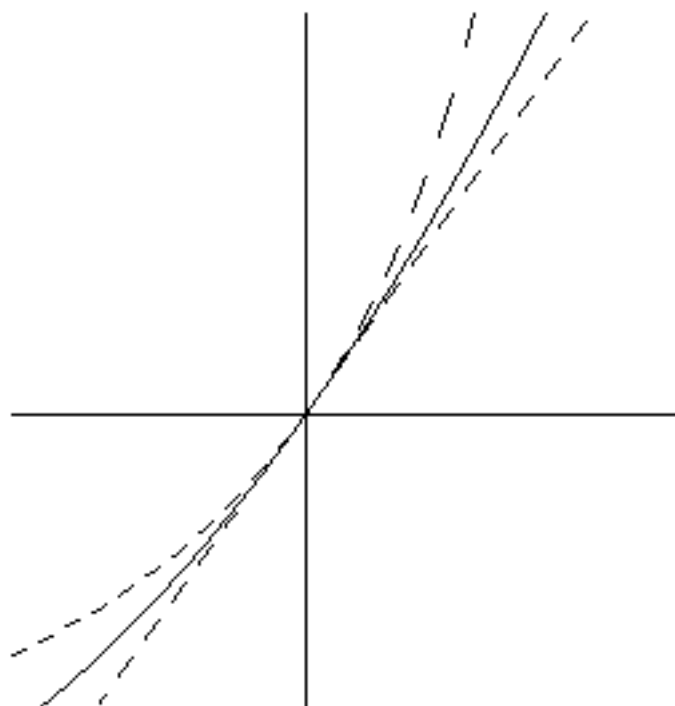


figure 19.

Il est bien clair que la fonction $F(w) = G(1+w) - 1$ de la variable complexe w a, tout comme $G(z)$ elle-même, tous ses coefficients de Taylor positifs; de même la fonction $F(w) - aw$. De sorte que

$$\begin{aligned} |F(w)| &\leq F(|w|) \\ |F(w) - aw| &\leq F(|w|) - a|w| \\ |F(w') - F(w)| &\leq |w' - w| F'(t_0) \quad \text{si } |w'| \leq t_0 \text{ et } |w| \leq t_0 \end{aligned} \quad (VIII.16.)$$

La troisième de ces inégalités devient aussi compréhensible que les deux premières dès lors qu'on applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto F(w + t(w' - w))$ et qu'on tient compte du fait que les coefficients de Taylor de la fonction dérivée $F'(w)$ sont tous positifs.

En ce qui concerne les itérées, on aura aussi les inégalités

$$\begin{aligned} |F_n(w)| &\leq F_n(|w|) \\ \left| F_{n+1}\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_n\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| &\leq \left| F_n\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_{n-1}\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| \times F'(t_0) \end{aligned}$$

On obtient en effet la seconde de ces inégalités en appliquant la troisième des inégalités (VIII.16) avec $w' \rightarrow F_n(w/a^{n+1})$ et $w \rightarrow F_{n-1}(w/a^n)$, il suffit que t_0 soit plus grand que les modules de ces deux nombres.

On peut alors répéter le processus et faire une récurrence descendante, qui donnera

$$\left| F_{n+1}\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - F_n\left(\frac{w}{a^n}\right) \right| \leq \left| F\left(\frac{w}{a^{n+1}}\right) - \frac{w}{a^n} \right| \times F'(t_0)^n$$

Cela est valide pourvu que les modules des nombres complexes $F_{j+1}(w/a^j)$ soient tous, pour j variant de 0 à $n-1$, inférieurs à t_0 : c'est en effet la condition pour que l'inégalité puisse être utilisée pour les indices compris entre 1 et n .

Or nous avons vu (VIII.15) que

$$F_j(t) \leq \frac{a^j t}{1 - \frac{\alpha a^j t}{a-1}}$$

par conséquent, pour que $|F_{j+1}(w/a^n)|$ soit inférieur à t_0 pour tous les j entre 0 et $n-1$, il suffit de prendre

$$t_0 = \frac{|w|}{a - \frac{\alpha |w|}{a-1}}$$

En effet, pour $0 \leq j \leq n-1$ on a $n-j \geq 1$, donc

$$\frac{|w|}{a - \frac{\alpha |w|}{a-1}} \geq \frac{|w|}{a^{n-j} - \frac{\alpha |w|}{a-1}} \geq F_{j+1}\left(\frac{w}{a^n}\right)$$

Cela revient à dire que, si t_0 est fixé par ailleurs (et nous verrons plus loin qu'il faudra le choisir), l'inégalité ci-dessus sera vérifiée pour tous les w tels

que

$$|w| < \frac{a t_0}{1 + \frac{\alpha t_0}{a-1}}$$

Nous avons ainsi établi l'inégalité

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \left| F\left(\frac{\zeta}{a^{n+1}}\right) - \frac{\zeta}{a^n} \right| \times F'(t_0)^n \quad (VIII.16.)$$

Mais par ailleurs, puisque la fonction $F(w) - aw$ possède la propriété que tous ses coefficients de Taylor sont positifs, on a aussi

$$\left| F\left(\frac{\zeta}{a^{n+1}}\right) - \frac{\zeta}{a^n} \right| \leq F\left(\frac{|\zeta|}{a^{n+1}}\right) - \frac{|\zeta|}{a^n} \leq \frac{a^{-n} |\zeta|}{1 - \frac{\alpha a^{-n} |\zeta|}{a-1}} - a^{-n} |\zeta| \quad (VIII.17.)$$

Or (en posant $t = a^{-n} |\zeta|$)

$$\frac{t}{1 - \frac{\alpha t}{a-1}} - t = \frac{\alpha t^2}{a-1 - \alpha t}$$

et si on pose encore

$$\rho = \frac{a t_0}{1 + \frac{\alpha t_0}{a-1}}$$

on peut déduire de (VIII.17) que pour tout ζ tel que $|\zeta| < \rho$ et pour tout entier n :

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \frac{\alpha |\zeta|^2 a^{-2n} F'(t_0)^n}{a-1 - \alpha |\zeta| a^{-n}}$$

Puisque $a > 1$ il est clair que, quelle que soit la valeur de ρ , le dénominateur de l'expression ci-dessus deviendra supérieur à $(a-1)/2$ à partir d'un certain rang n_0 (dès que a^{-n} sera devenu inférieur à $(a-1)/2\alpha\rho$). Donc pour $n \geq n_0$ on aura

$$|Q_{n+1}(\zeta) - Q_n(\zeta)| \leq \frac{2\alpha\rho^2}{a-1} \times \left[\frac{F'(t_0)}{a^2} \right]^n \quad (VIII.18.)$$

Cela entraîne bien que la suite Q_n converge à l'intérieur du disque $|\zeta| < \rho$. La limite $Q = \lim Q_n$ sera donc au moins définie et analytique dans ce disque; mais bien entendu, il se peut qu'elle se prolonge analytiquement au-delà. En tous cas, au moins à l'intérieur de ce disque, elle sera la somme d'une série entière convergente. Cela légitime les calculs que nous avons faits plus haut, pour obtenir les premiers coefficients de cette série entière.

Tout au long de ces chaînes logiques, nous avons utilisé, pour les fonctions $G(z)$, $G'(z)$, $F(w)$, $F'(w)$, etc., la propriété typique des fonctions *absolument monotones*, à savoir que, leurs coefficients de Taylor étant tous positifs, on a $|G(z)| \leq G(|z|)$, $|G'(z)| \leq G'(|z|)$, $|F(w)| \leq F(|z|)$, $|F'(w)| \leq F'(|z|)$, etc.

Ainsi, nous venons d'établir que la fonction $Q(\zeta)$ était analytique au moins dans le disque $|\zeta| < \rho$ avec

$$\rho = \frac{a t_0}{1 + \frac{\alpha t_0}{a - 1}}$$

où t_0 est tel que $F'(t_0) = a^2$. Cela a été rendu possible précisément par le fait que si $F'(t_0) = a^2$, alors pour tout nombre complexe w de module inférieur à t_0 , on aura $|F'(w)| < a^2$. Mais on voit que ce disque de convergence est limité : par exemple la présence d'un point singulier de la fonction $G(z)$ à proximité du disque $|z| < 1$ aura pour effet de rendre ce disque très petit.

Or, la fonction caractéristique asymptotique $\Phi(t)$ que nous cherchons à déterminer (qui est, rappelons-le, la limite des fonctions caractéristiques $\Phi_n(a^{-n}t)$ des variables aléatoires Z_n/a^n) est égale à $1 + Q(it)$; on a

$$\Phi_n(a^{-n}t) = G_n(e^{ia^{-n}t})$$

et pour tout t réel, $e^{ia^{-n}t}$ est de module 1, donc $G'(e^{ia^{-n}t})$ est inférieur ou égal à $G'(1) = a$ en module, ce qui est évidemment plus intéressant que de pouvoir dire seulement que $|G'|$ est inférieur à a^2 . Cela a, comme nous allons le voir maintenant, une conséquence pratique : les fonctions caractéristiques $\Phi_n(a^{-n}t)$, du fait qu'elles ne prennent en compte que les valeurs complexes de module 1 pour la variable z dont dépend $G(z)$, convergent (lorsque n tend vers l'infini) pour tout t réel, et non pas seulement dans un disque. Ou encore : la série de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$ ne converge, du moins en général, que dans un disque de rayon limité, mais elle se prolonge analytiquement jusqu'à l'infini dans un voisinage de l'axe imaginaire $\zeta = it$; en effet la relation entre t et ζ est $\zeta = a^n(e^{ia^{-n}t} - 1)$. Une troisième façon de dire cela : la fonction $Q(\zeta)$ peut avoir des points singuliers qui limitent la taille de son disque de convergence, mais ces points sont toujours en dehors de l'axe $\zeta = it$, de sorte que la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(a^{-n}t) = 1 + Q(it)$$

est vraie pour tout t réel.

Pour calculer les coefficients de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$, il avait été beaucoup plus commode de partir de la fonction $F(w) = G(1 + w) - 1$, car

celle-ci (du fait que la série de F n'a pas de terme constant) permettait d'obtenir pour les coefficients successifs un système triangulaire permettant une récurrence.

Par contre, pour mettre en évidence que Q est analytique dans un domaine allongé contenant l'axe des ζ imaginaires, il est préférable d'employer la fonction $G(z)$. Nous allons donc montrer, tout comme nous l'avions fait pour la suite de fonctions Q_n , que la série des $|\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)|$ converge *pour tout t réel*, en la majorant à nouveau par une série géométrique.

Partons donc de l'inégalité générale

$$|G(x) - G(y)| \leq |x - y| G'(r)$$

qui a lieu pour n'importe quels nombres complexes x et y dont le module est inférieur ou égal à r (inutile de la redémontrer). Donc

$$\begin{aligned} |\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)| &= |G_{n+1}(e^{ia^{-(n+1)}t}) - G_n(e^{ia^{-n}t})| \\ &= |G(G_n(e^{ia^{-(n+1)}t})) - G(G_{n-1}(e^{ia^{-n}t}))| \\ &\leq |G_n(e^{ia^{-(n+1)}t}) - G_{n-1}(e^{ia^{-n}t})| \times G'(1) \end{aligned}$$

car les nombres complexes $x = G_n(e^{ia^{-(n+1)}t})$ et $y = G_{n-1}(e^{ia^{-n}t})$ sont tous deux de module ≤ 1 . On peut répéter le procédé (par récurrence descendante), car les nombres $G_{n-j}(e^{ia^{-n}t})$ sont tous de module ≤ 1 . On obtient ainsi

$$|\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)| \leq |G(e^{ia^{-(n+1)}t}) - e^{ia^{-n}t}| \times a^n$$

Tout comme nous l'avions fait avec la fonction $F(w)$, il s'agit maintenant de majorer l'expression $|G(e^{i(\theta/a)}) - e^{i\theta}|$ (on prendra ensuite $\theta = a^{-n}t$). Cela est aisé, si on utilise le développement limité de l'exponentielle déjà employé au chapitre **VII**: $e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + R(\alpha)$, avec $|R(\alpha)| \leq \alpha^2/2$.

$$\begin{aligned} |G(e^{i(\theta/a)}) - e^{i\theta}| &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k \left(1 + ik \frac{\theta}{a} + R(k \frac{\theta}{a}) \right) - 1 - i\theta - R(\theta) \right| \\ &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k + i \frac{\theta}{a} \sum_{k \geq 0} p_k k + \sum_{k \geq 0} p_k R(k \frac{\theta}{a}) - 1 - i\theta - R(\theta) \right| \\ &= \left| \sum_{k \geq 0} p_k R(k \frac{\theta}{a}) - R(\theta) \right| \\ &\leq \frac{\theta^2}{2} \left[\sum_{k \geq 0} p_k \frac{k^2}{a^2} \right] + 1 \end{aligned}$$

On voit donc s'introduire le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire Z_1 , à savoir $M_2 = \sum p_k k^2$. En fin de compte :

$$|\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)| \leq \frac{t^2}{2a^{2n}} \times \left(\frac{M_2}{a^2} + 1\right) \times a^n = \frac{t^2}{2a^n} \times \left(\frac{M_2}{a^2} + 1\right)$$

Ceci montre (puisque $a > 1$) que *pour tout* t la série $\Phi_{n+1}(a^{-(n+1)}t) - \Phi_n(a^{-n}t)$ est majorée par une série géométrique de raison $1/a$. Du point de vue mathématique, cette conclusion n'est valable que si la série $\sum p_k k^2$ converge ; mais nous avons déjà fait remarquer plus d'une fois que dans les problèmes pratiques les p_k sont toujours nuls à partir d'un certain rang (et surtout dans le cas des neutrons de fission).

Ainsi, pour les valeurs *complexes* de t , la fonction limite $\Phi(t) = 1 + Q(it)$ n'est la somme d'une série entière que dans un disque, mais pour les valeurs *réelles* de t , $\Phi(t)$ est définie sur tout l'intervalle $] -\infty \quad +\infty[$ comme la limite de la suite des fonctions $\Phi_n(a^{-n}t)$.

La question est alors de savoir comment on peut calculer effectivement cette fonction limite $\Phi(t) = 1 + Q(it)$. Nous avons déjà vu comment calculer récursivement les coefficients de Taylor de la fonction $Q(\zeta)$: cet algorithme est efficace pour calculer $Q(\zeta)$, donc en particulier $Q(it)$, pour les petites valeurs de t , mais la petitesse du disque de convergence ne permet pas de le calculer pour les grandes valeurs de t . Pour ces dernières, on utilisera alors l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Q (ou bien par la fonction Φ) :

$$\begin{aligned} Q(a\zeta) &= F(Q(\zeta)) \\ \Phi(at) &= G(\Phi(t)) \end{aligned} \tag{VIII.19.}$$

En effet, si Q ou Φ est connue au voisinage de zéro, on peut en déduire les valeurs dans un voisinage a fois plus grand en utilisant ces équations fonctionnelles ; puis en répétant le processus, dans un voisinage a^2 , puis a^3 , a^4 , ... a^n fois plus grand. Si on procède ainsi avec un nombre complexe ζ quelconque, le procédé finira par diverger lorsqu'on atteindra les bords du domaine d'analyticité ; mais ce que nous venons de voir nous garantit que pour t réel on pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra⁽¹⁾.

On peut par exemple suivre le plan que voici. On calcule d'abord les valeurs de $\Phi(t)$ entre $t = 10^{-5}$ et $t = 10^{-5} \times a$ en utilisant la série entière. Par exemple, on calcule les valeurs en dix points $t_0 = 10^{-5}$, $t_1 =$

⁽¹⁾ Rappelons que ce que nous venons de voir présupposait que $M_2 = \sum p_k k^2$ ne soit pas infini ; cela revient à supposer que la fonction $G(x)$ est dérivable à l'ordre deux en $x = 1$.

$10^{-5} \times [1 + 0.1(a-1)]$, $t_2 = 10^{-5} \times [1 + 0.2(a-1)]$, $t_3 = 10^{-5} \times [1 + 0.3(a-1)]$,
 $\dots t_{10} = 10^{-5} \times a$. Ou bien $t_0 = 10^{-5}$, $t_1 = 10^{-5} \times a^{0.1}$, $t_2 = 10^{-5} \times a^{0.2}$,
 $t_3 = 10^{-5} \times a^{0.3}$, $\dots t_{10} = 10^{-5} \times a$. Ensuite, on calcule les valeurs en
 $t_{11} = a t_1$, $t_{12} = a t_2$, $t_{13} = a t_3$, $\dots t_{21} = a^2 t_1$, $t_{22} = a^2 t_2$, $t_{23} = a^2 t_3$, $\dots$, $\dots$.
 On trouvera en fin de chapitre un programme (écrit en PASCAL, qui calcule
 la fonction $\Phi(t)$ par ce procédé, pour toute donnée de la loi initiale de Z_1 .

Enfin, lorsque la fonction caractéristique asymptotique Φ est connue (par exemple par le calcul numérique), on peut reconstituer la densité limite en effectuant une transformation de Fourier inverse. Il faut cependant prendre en compte la probabilité (non nulle lorsque $a = G'(1) > 1$) de l'extinction ultime, qui est égale à x_0 , l'unique racine < 1 de l'équation $G(x) = x$. La loi de probabilité de Z_n pour n grand est en effet composée de deux parties: d'une part la valeur zéro qui a une probabilité x_0 non infinitésimale, et d'autre part un nombre énorme de valeurs entières distribuées entre 0 et N^n (N étant la plus grande des valeurs prises par Z_1), ayant chacune une probabilité infinitésimale, mais totalisant la probabilité restante $1 - x_0$. C'est bien sûr la deuxième partie qui est adéquatement décrite par la densité, tandis que la première partie reste discrète.

On peut donc dire que la loi asymptotique de Z_n est entièrement déterminée par la connaissance de x_0 (probabilité que $Z_n = 0$) et de la densité f , de sorte que pour n grand et $0 < a < b$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Z_n = 0) &\simeq x_0 \\ \mathcal{P}\left(a < \frac{Z_n}{a^n} < b\right) &\simeq \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de cette loi est la fonction caractéristique asymptotique:

$$\Phi(t) = x_0 + \int_0^\infty f(x) e^{itx} dx \quad (VIII.20.)$$

D'après les propriétés connues de la transformation de Fourier (voir *cours de mathématiques*), l'intégrale ci-dessus tend vers zéro lorsque t tend vers $\pm\infty$ si f est suffisamment régulière (par exemple dérivable); cela implique que $\Phi(t)$ tend vers x_0 . La densité f n'est donc pas la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t)$, mais de $\Phi(t) - x_0$. On peut donc dire que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t) - x_0] e^{-ixt} dt \quad (VIII.21.)$$

sous réserve que l'intégrale ci-dessus converge (ce qui implique que f soit suffisamment régulière). Sinon on la traitera selon des procédés de

régularisation adéquats (cut-off, moyennisation). Cette dernière formule fournit donc un procédé numérique — on peut utiliser n'importe quel algorithme de transformation de Fourier — pour déterminer f à partir de la fonction caractéristique asymptotique Φ , supposée obtenue par les procédés indiqués précédemment. Bien entendu la probabilité x_0 s'obtiendra en cherchant la racine de l'équation $G(x_0) = x_0$ par itérations (méthode de Newton).

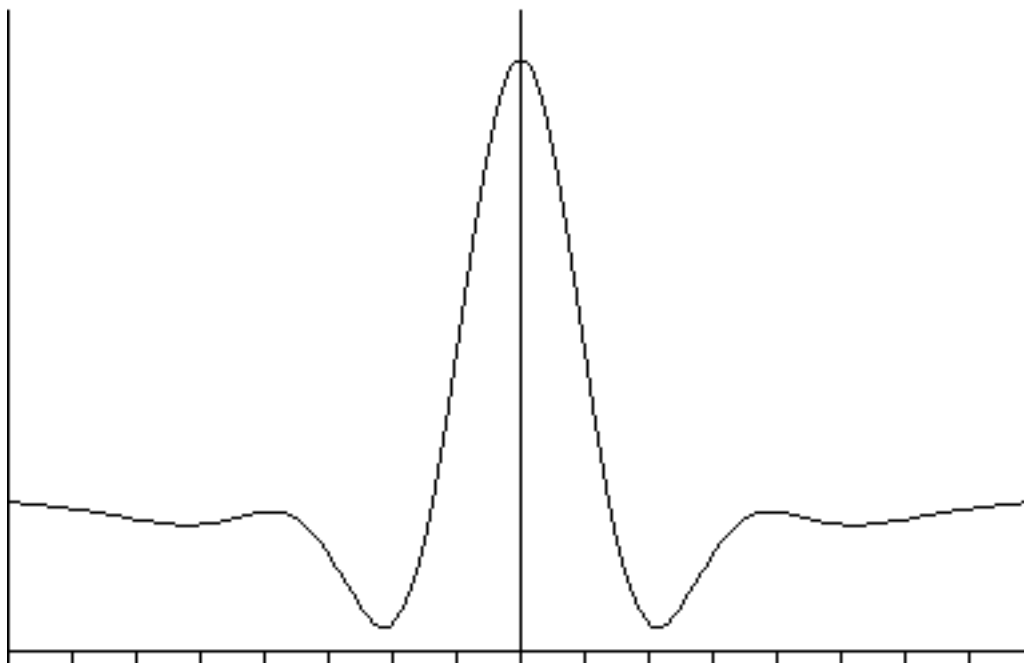


figure 20.

Ce graphique représente la partie réelle de la fonction caractéristique asymptotique $\Phi(t)$ de la loi $p_0 = \frac{1}{9}$; $p_1 = \frac{2}{9}$; $p_2 = 0$; $p_3 = \frac{2}{3}$, dont la moyenne est $a = 2.22$. Il s'agit donc de la limite, lorsque n tend vers l'infini, des fonctions $\Phi_n(t) = G_n(e^{ia^{-n}t})$, avec $G(z) = (1 + 2z + 6z^3)/9$. Ce graphique a été obtenu avec 9 itérations, c'est donc le graphique de $G_9(e^{ia^{-9}t})$ (on n'obtient pas un meilleur graphique en itérant davantage, car le gain en précision devient alors inférieur à la définition de l'imprimante).

Cette fonction contient toute l'information utile sur la distribution de probabilité de la variable aléatoire Z_n pour n grand, c'est-à-dire qu'elle décrit la situation statistique limite de la fission après un certain temps de relaxation. Elle n'est pas la fonction caractéristique d'une loi de probabilité discrète, mais d'une loi asymptotique : la loi limite de Z_n/a^n lorsque n tend vers l'infini. Nous avons vu que cette loi limite comporte une partie discrète (la probabilité que $Z_n = 0$, égale à x_0 , la racine de l'équation $G(x) = x$) et une densité continue qui décrit la distribution en probabilité des valeurs non nulles. On constate que le graphique est formé d'une partie centrale avec un maximum accentué (toutes les fonctions caractéristiques sont maximum en $t = 0$ et ce maximum vaut toujours 1), et d'une partie plate sur les bords, qui correspond au fait que la limite de la fonction caractéristique asymptotique pour t grand est toujours égale à x_0 .

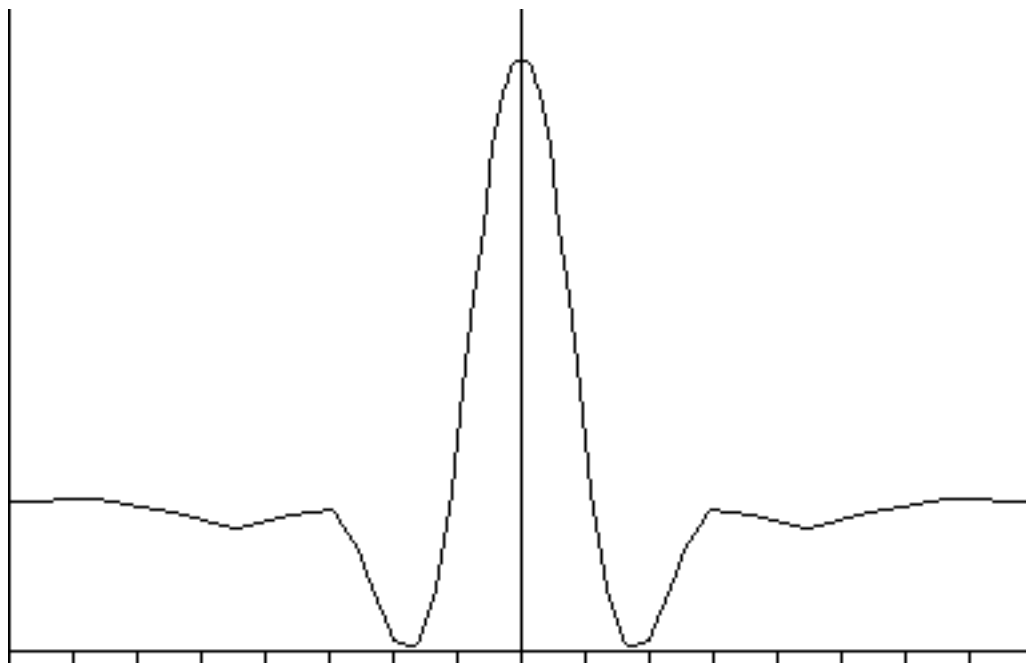


figure 21.

Ce graphique presque identique au précédent a été obtenu avec un algorithme très différent : on a cette fois utilisé les procédés étudiés dans le texte. On a commencé par déterminer les coefficients de la série de Taylor de $Q(\zeta)$; puis on a calculé $Q(it)$ en quatre points très proches de zéro à l'aide de cette série ; enfin, pour les valeurs éloignées de zéro, on a utilisé l'équation fonctionnelle $\Phi(at) = G(\Phi(t))$. On remarque que loin de zéro, la courbe devient une ligne brisée : cela est dû au manque de finesse de la discrétisation, et montre qu'en pratique quatre points initiaux sont insuffisants. C'est pourquoi les deux courbes de la page suivante sont meilleures (elles font appel à huit et seize points initiaux). Mais cet algorithme est bien plus rapide que l'itération directe de la fonction G .

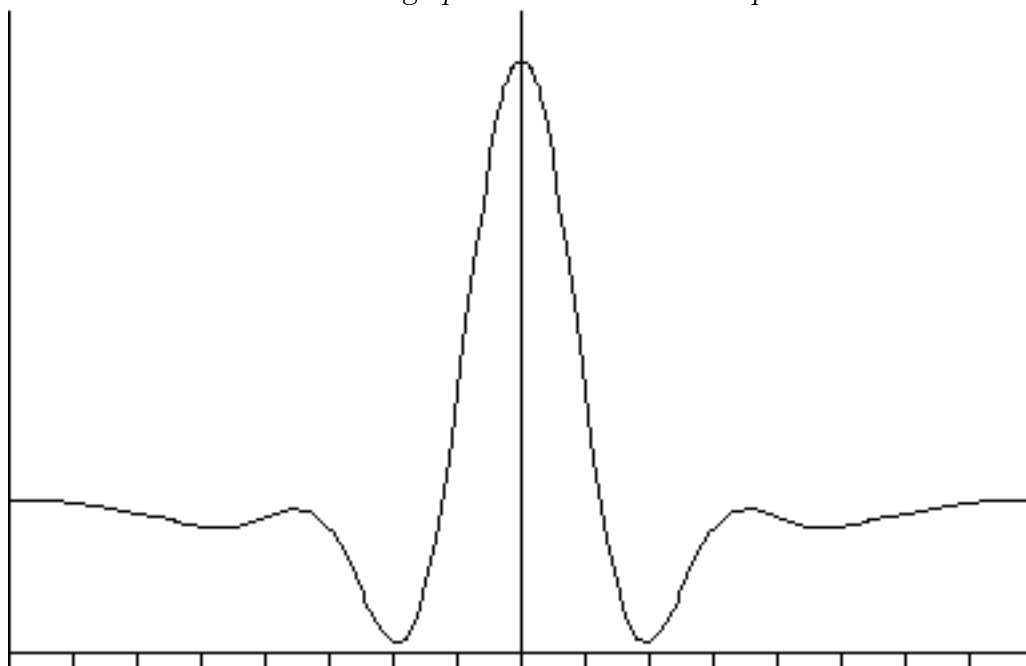


figure 22.

On a amélioré la courbe précédente en prenant 8 points initiaux au lieu de quatre.

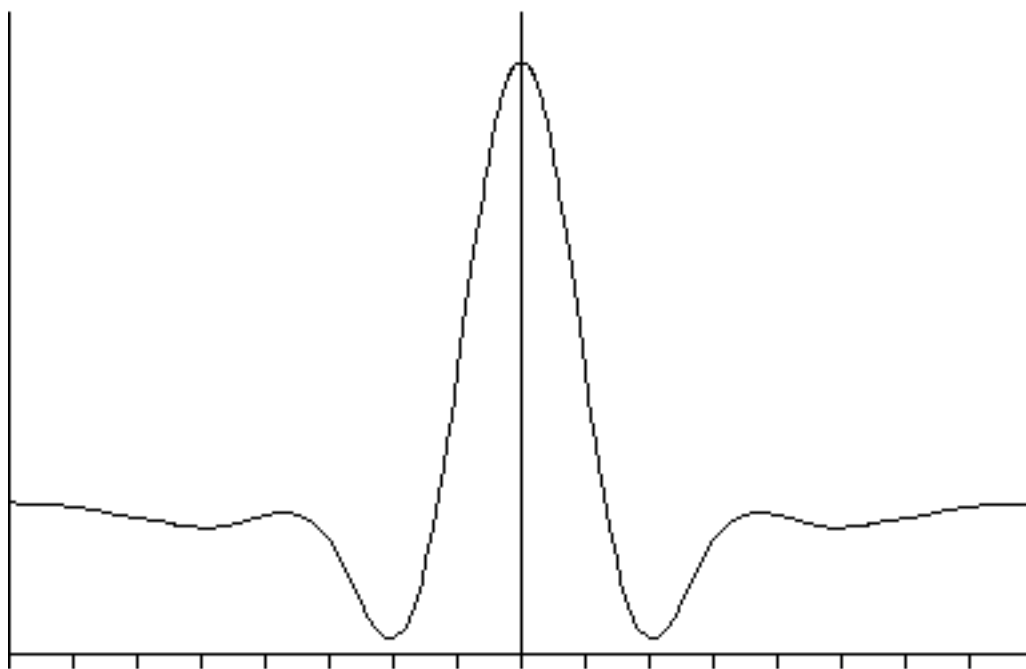


figure 23.

Encore mieux avec 16 points initiaux. Le résultat est maintenant aussi bon qu'avec l'itération, et le calcul bien plus rapide.

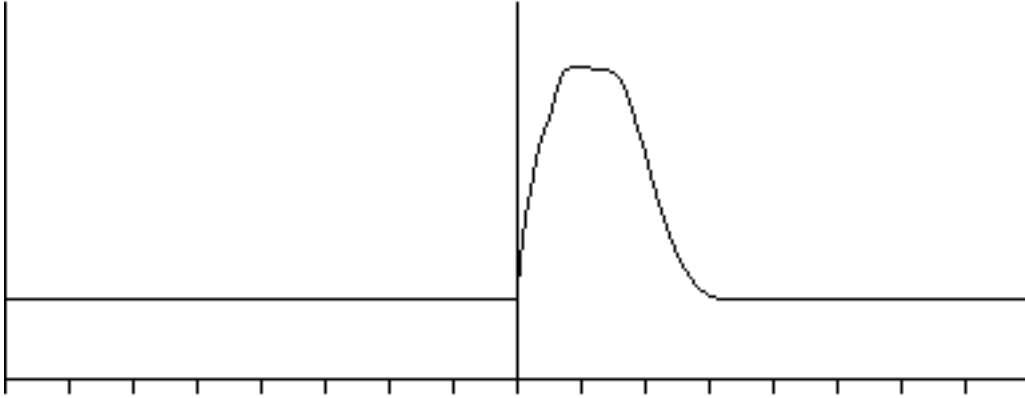


figure 24.

Et voici maintenant la *densité* de la loi limite. Cette densité décrit la distribution en probabilité des valeurs non nulles de $a^{-n}Z_n$ (pour n grand). Si on voulait représenter sur ce même graphique la probabilité discrète que $Z_n = 0$, il faudrait dessiner un pic extrêmement haut et étroit concentré sur l'axe vertical situé au milieu du graphique (cet axe marque l'abscisse zéro).

Le graphique a été obtenu par la *transformée de Fourier inverse*. La fonction caractéristique d'une loi de probabilité est en effet sa transformée de Fourier, on retrouve donc la loi de probabilité à partir de la fonction caractéristique en effectuant l'opération inverse. Mais la densité représentée ci-dessus n'est qu'une partie de la loi, celle qui concerne les valeurs non nulles. Si $f(x)$ est la densité représentée ci-dessus (de sorte que $\mathcal{P}(Z_n = k) = f(k/a^n)$) la fonction caractéristique asymptotique est

$$\Phi(t) = x_0 + \sum_{k \geq 1} f(a^{-n}k) e^{ik a^{-n}t}$$

puisque $\mathcal{P}(Z_n = 0) = x_0$, où x_0 est la racine de $G(x_0) = x_0$. Lorsque n est grand la somme devient une intégrale avec $dx = a^{-n}$ et $x = a^{-n}k$:

$$\Phi(t) = x_0 + \int_{x>0} f(x) e^{ixt}$$

ce qui montre que $f(x)$ n'est pas la transformée de Fourier inverse de $\Phi(t)$, mais de $\Phi(t) - x_0$.

Les méthodes exposées dans ce chapitre permettent de déterminer la fonction caractéristique asymptotique de $a^{-n}Z_n$; pour obtenir la densité, il suffit ensuite d'effectuer numériquement cette transformée de Fourier inverse.

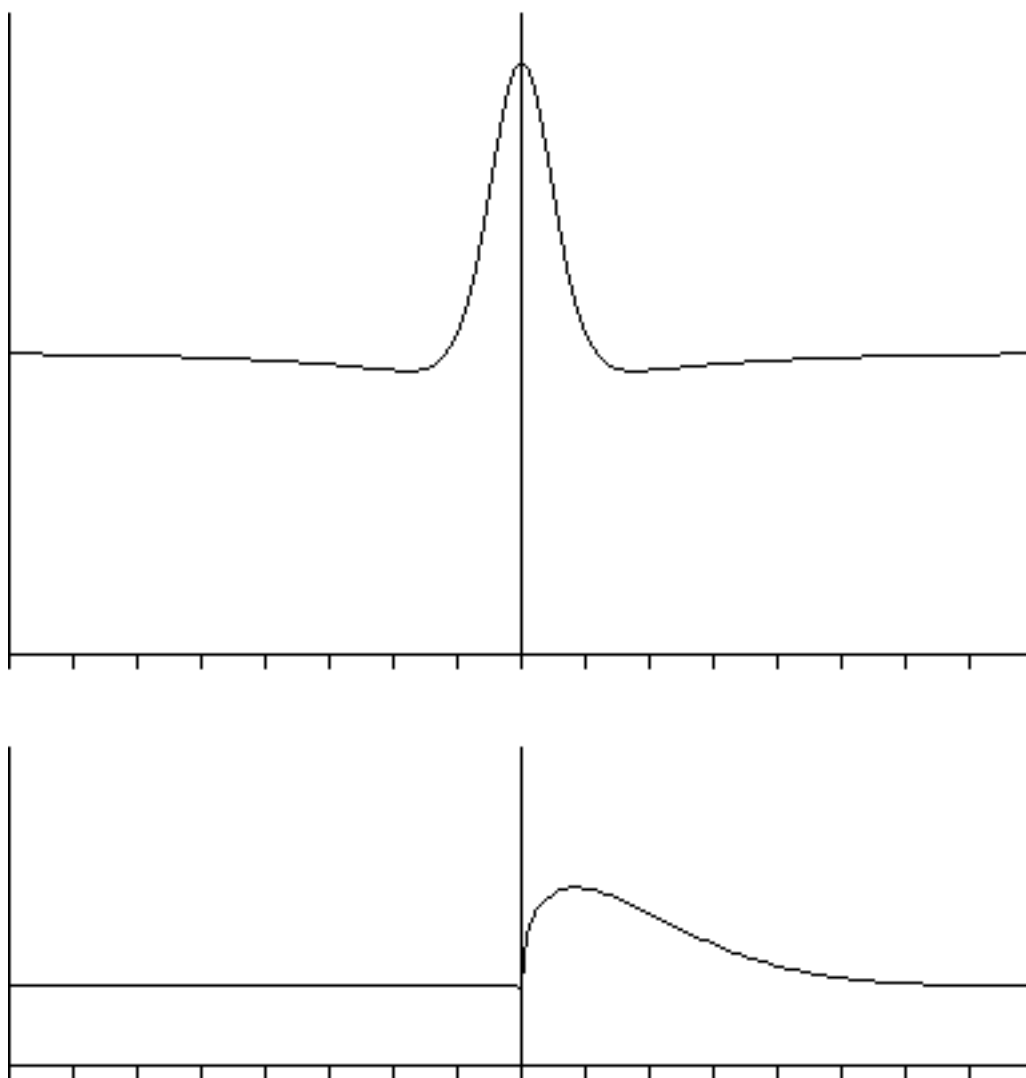


figure 25.

Voici (ci-dessus et pages suivantes) quelques autres exemples de fonctions caractéristiques asymptotiques (graphique du haut) et leurs densités (graphique du bas) pour différentes loi de probabilité initiales: ici, $G(z) = (3 + 2z + z^2 + 4z^3)/10$; la moyenne de Z_1 est donc $a = 1.4$. Pour x_0 , la probabilité que $Z_n = 0$, le calcul donne 0.444 922 417.

On constate que la densité est nulle pour les abscisses négatives, ce qui est normal puisque Z_n ne prend que des valeurs positives. Le maximum de la densité correspond en général à la valeur moyenne de Z_n , soit $k = a^n$. Bien entendu, a^n tend vers l'infini avec n , on choisit donc toujours pour les abscisses une échelle où a^n représente l'unité.

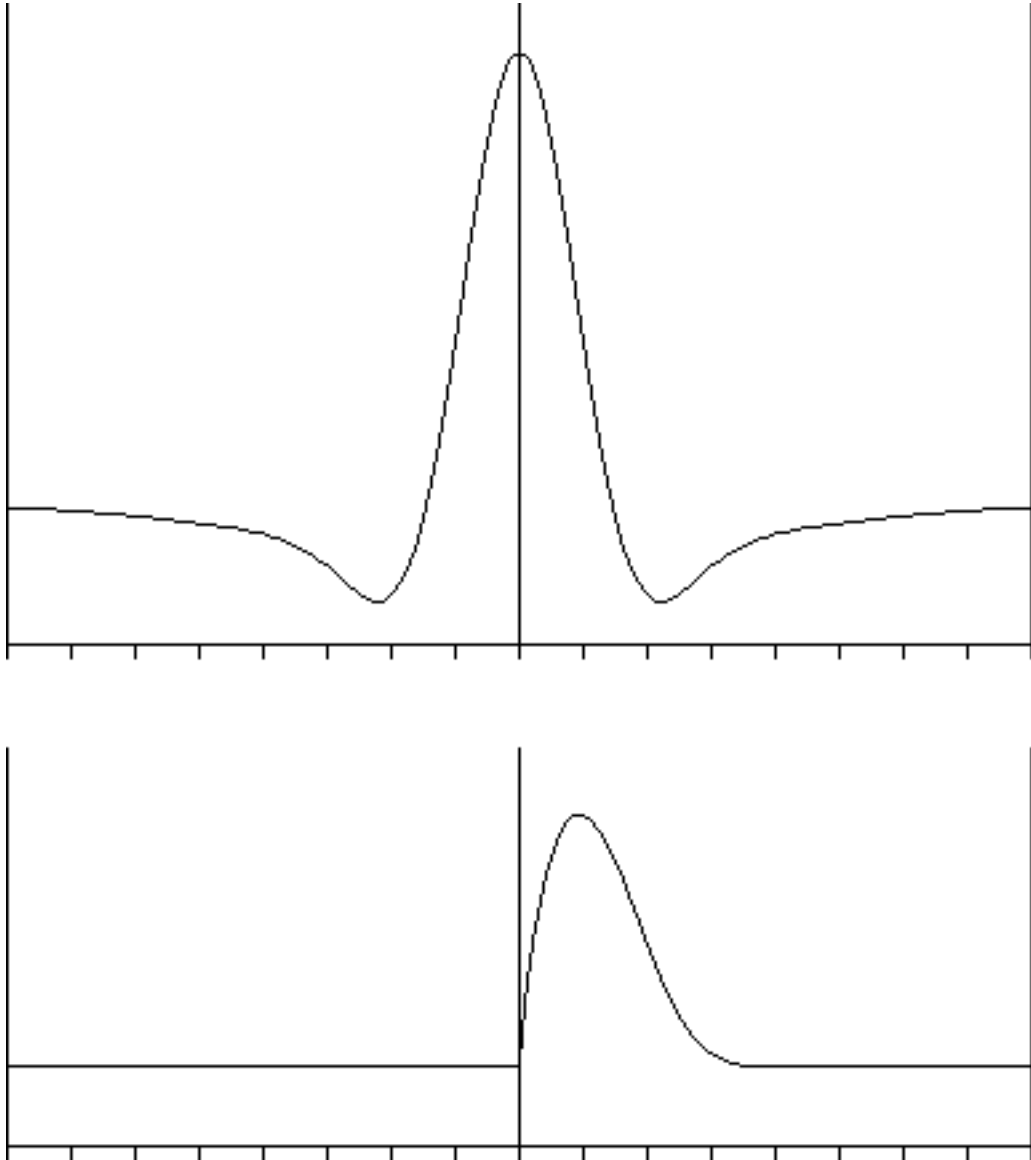


figure 26.

$$G(z) = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3)/10$$

$$a = 2.00$$

$$x_0 = 0.133\,726\,403$$

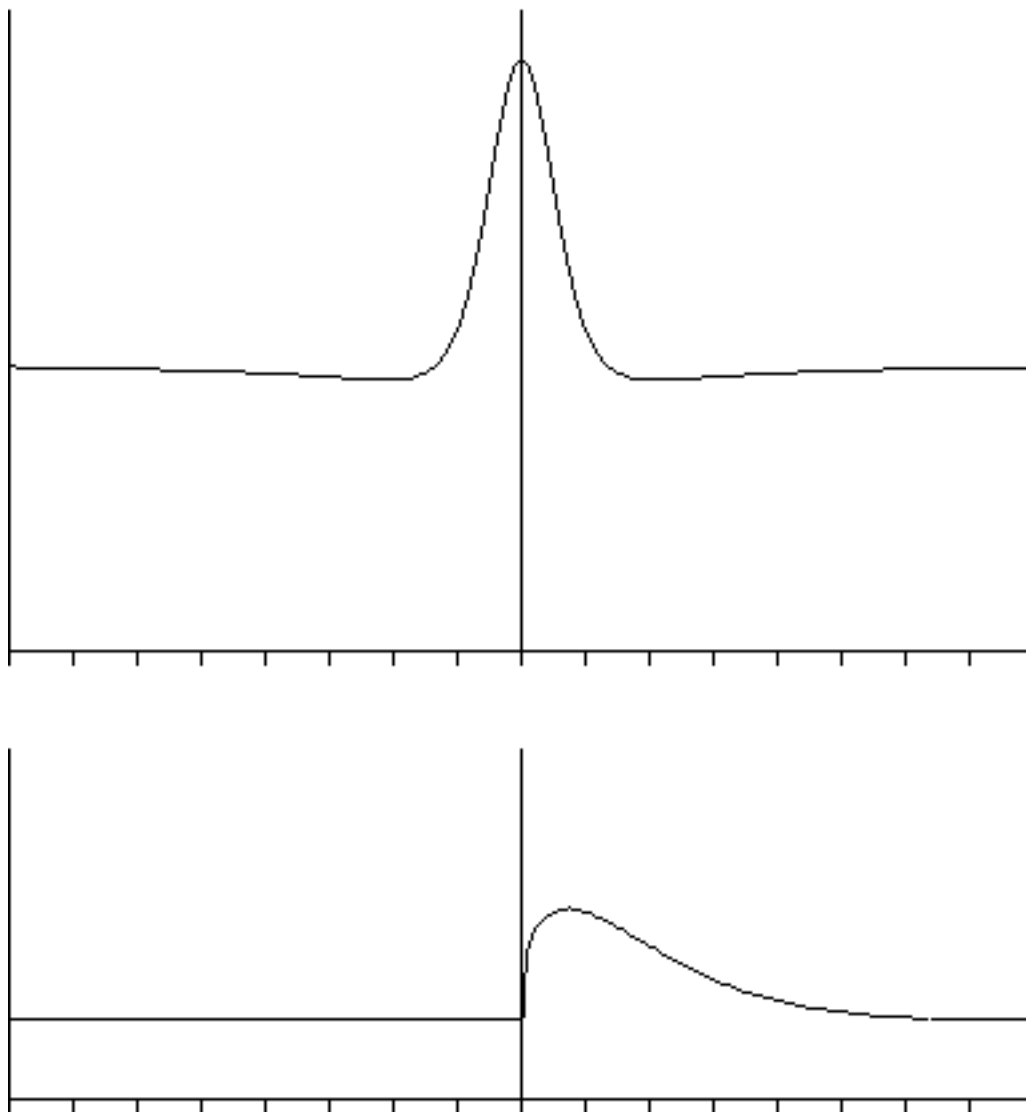


figure 27.

$$G(z) = (1 + z + z^2 + z^3)/4$$

$$a = 1.50$$

$$x_0 = 0.418\,888\,986$$

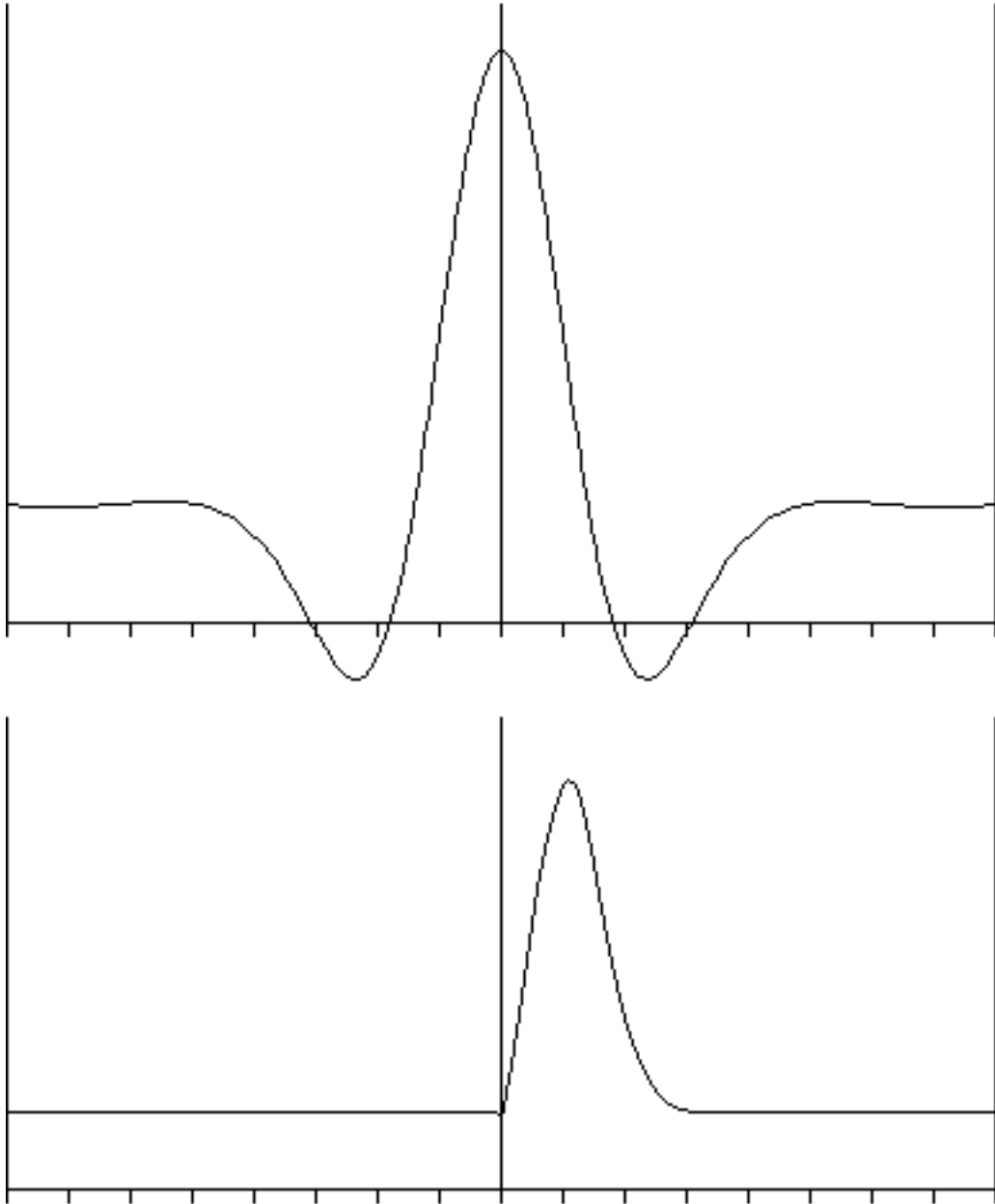


figure 28.

$$G(z) = (1 + z + 7z^2 + 3z^3)/12$$

$$a = 2.00$$

$$x_0 = 0.098\,950\,997$$

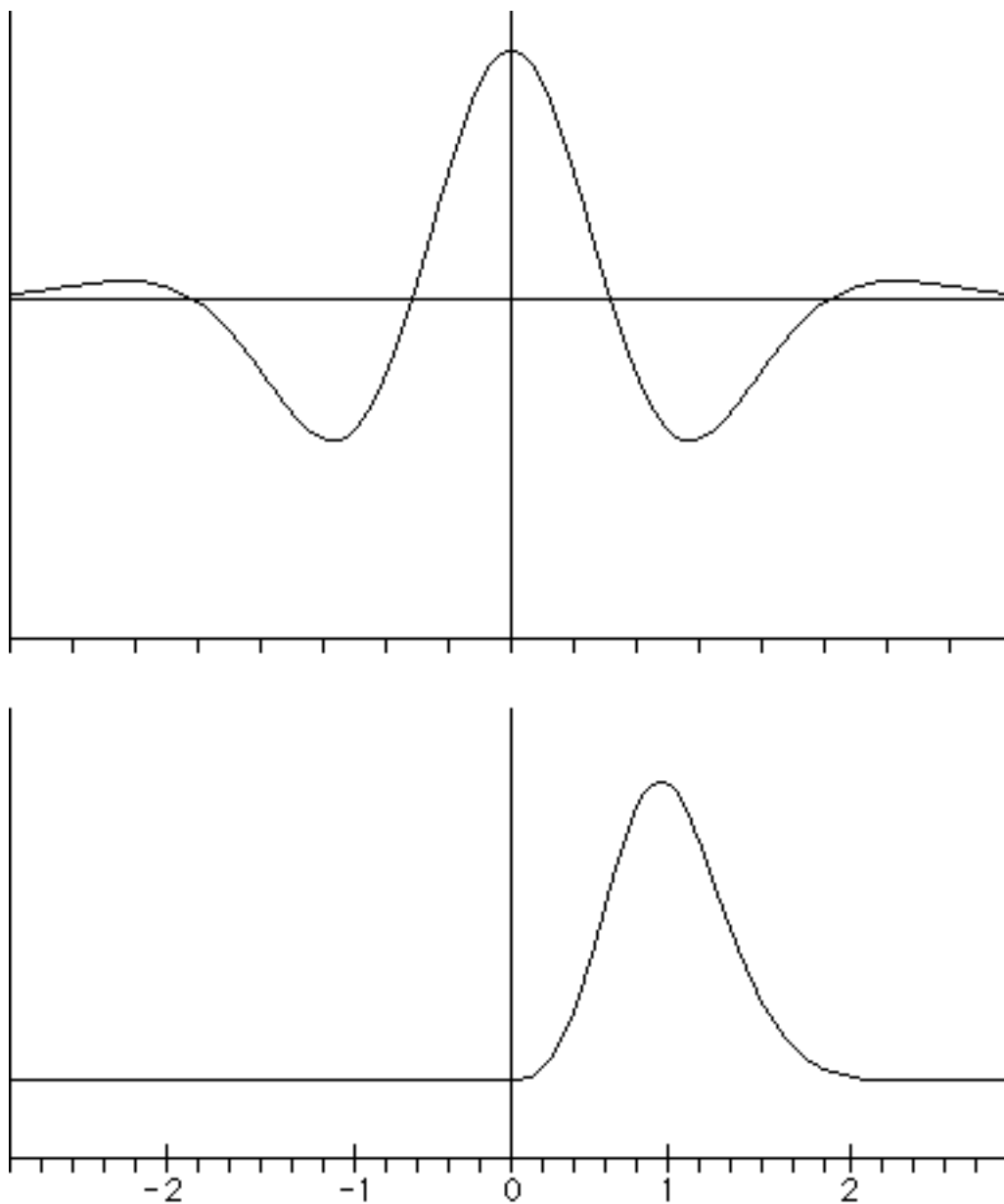


figure 29.

Loi de Poisson de moyenne 9 :

$$G(z) = e^{9(z-1)}$$

$$a = 9.00$$

$$x_0 = 0.000\,123\,547$$

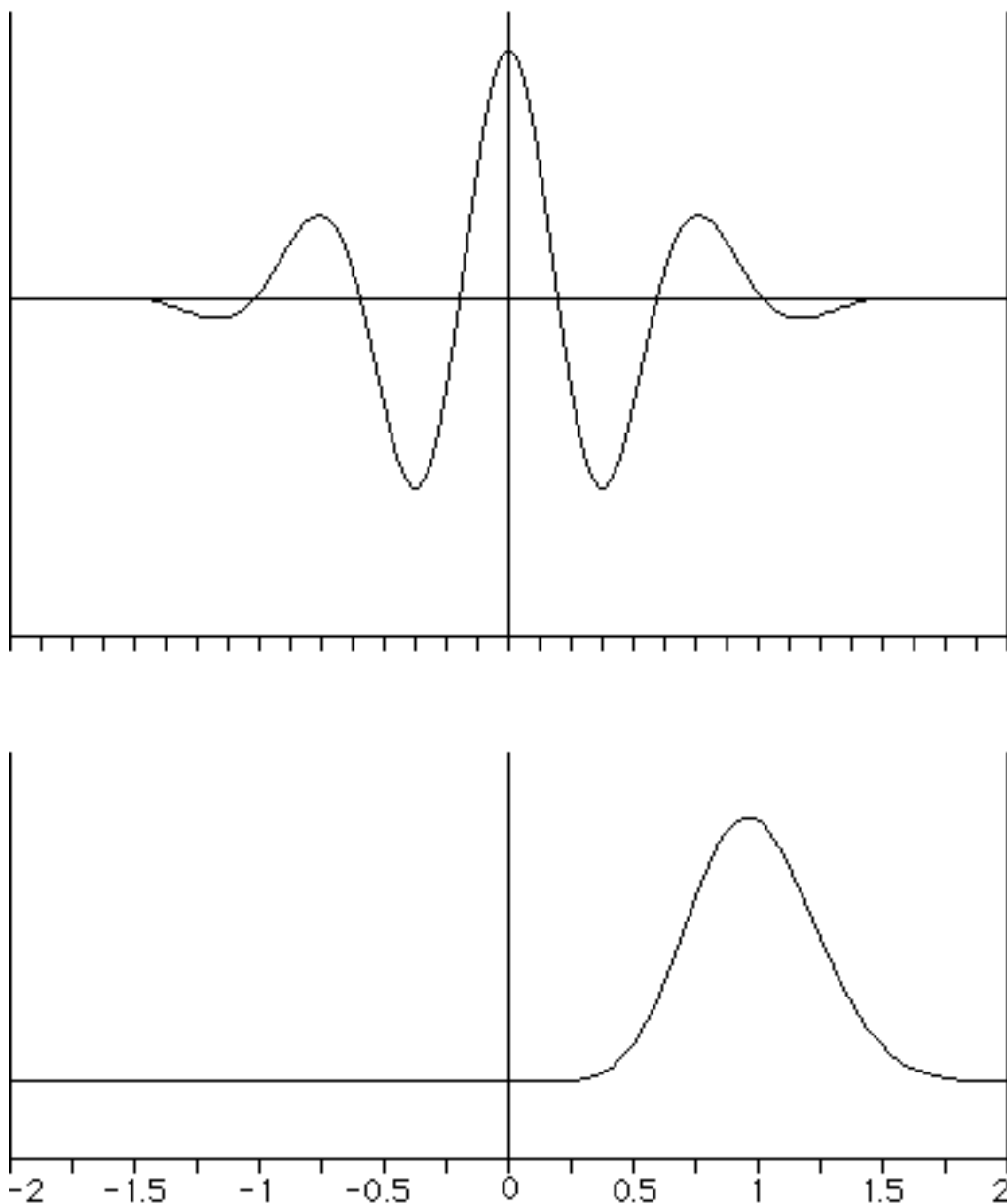


figure 30.

Loi de Poisson de moyenne 19 :

$$G(z) = e^{19(z-1)}$$

$$a = 19.00$$

$$x_0 = 5.6 \cdot 10^{-9}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente.

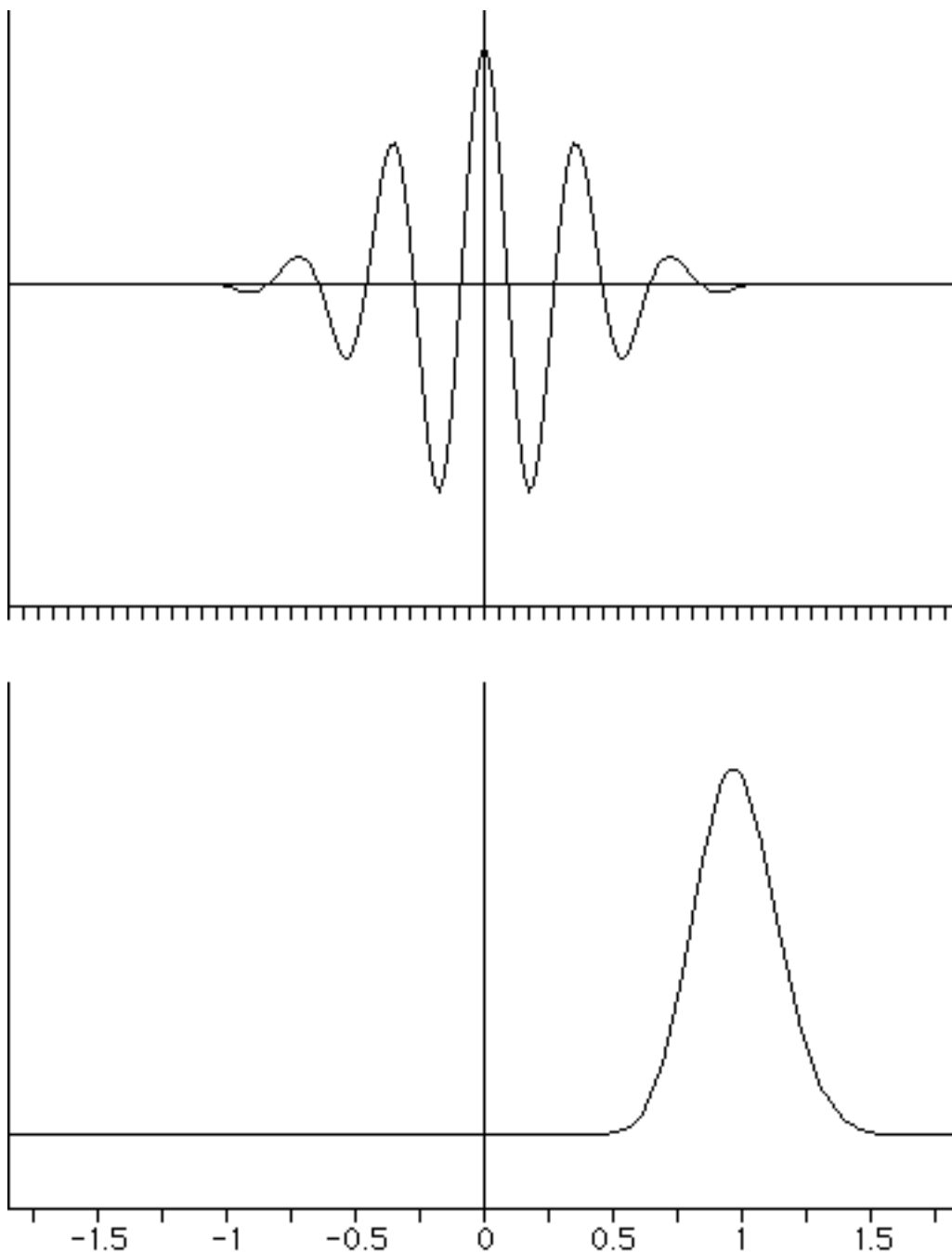


figure 31.

Loi de Poisson de moyenne 39 :

$$G(z) = e^{39(z-1)}$$

$$a = 39.00$$

$$x_0 = 1.2 \cdot 10^{-17}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente (donc d'un facteur $\frac{1}{4}$ par rapport à celui de la figure 29).

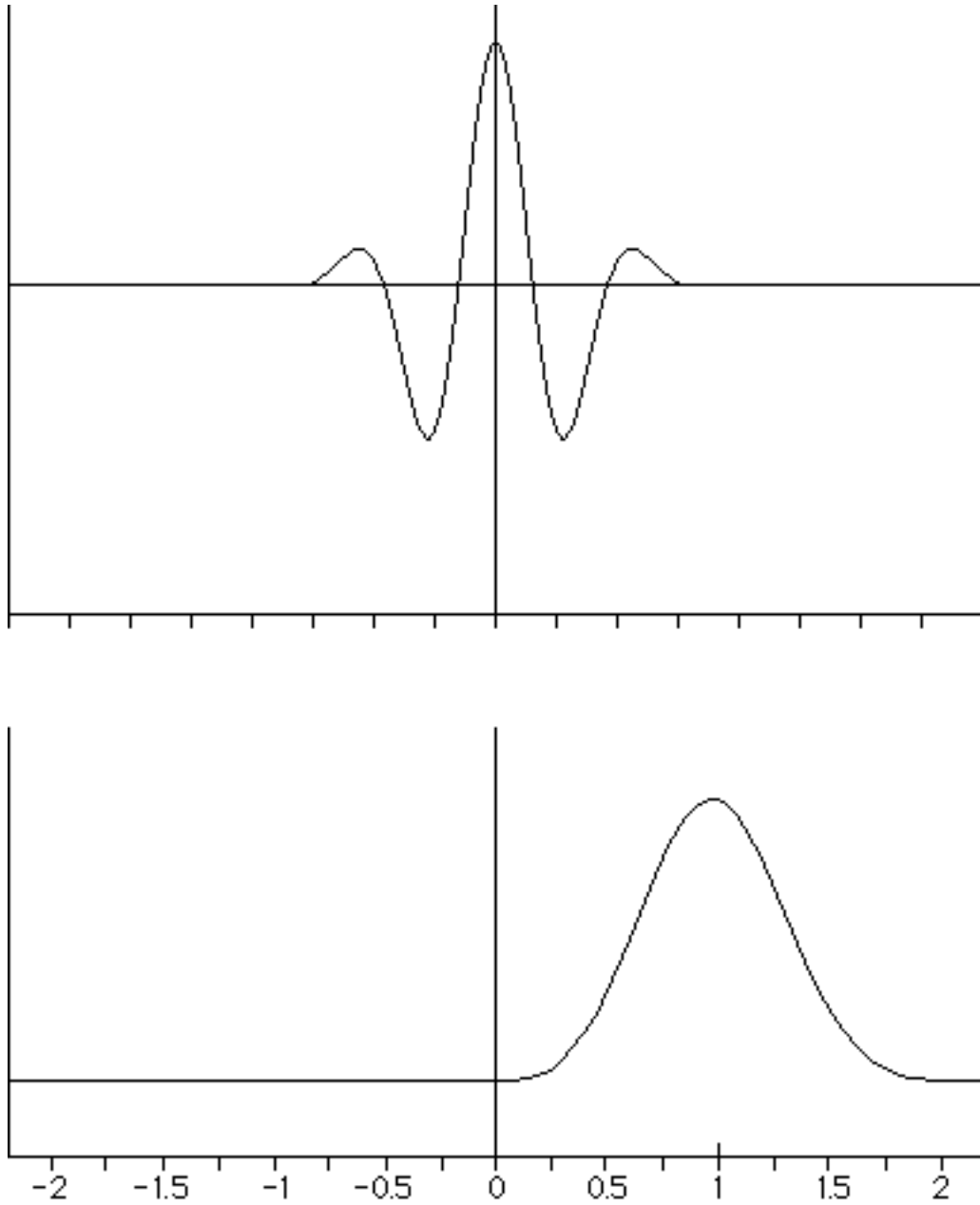


figure 32.

Loi de Bernoulli de moyenne 5 et de degré 9 :

$$G(z) = \left(1 + \frac{5}{9} (z - 1)\right)^9$$

$$a = 5.00$$

$$x_0 = 0.000\,301\,865$$

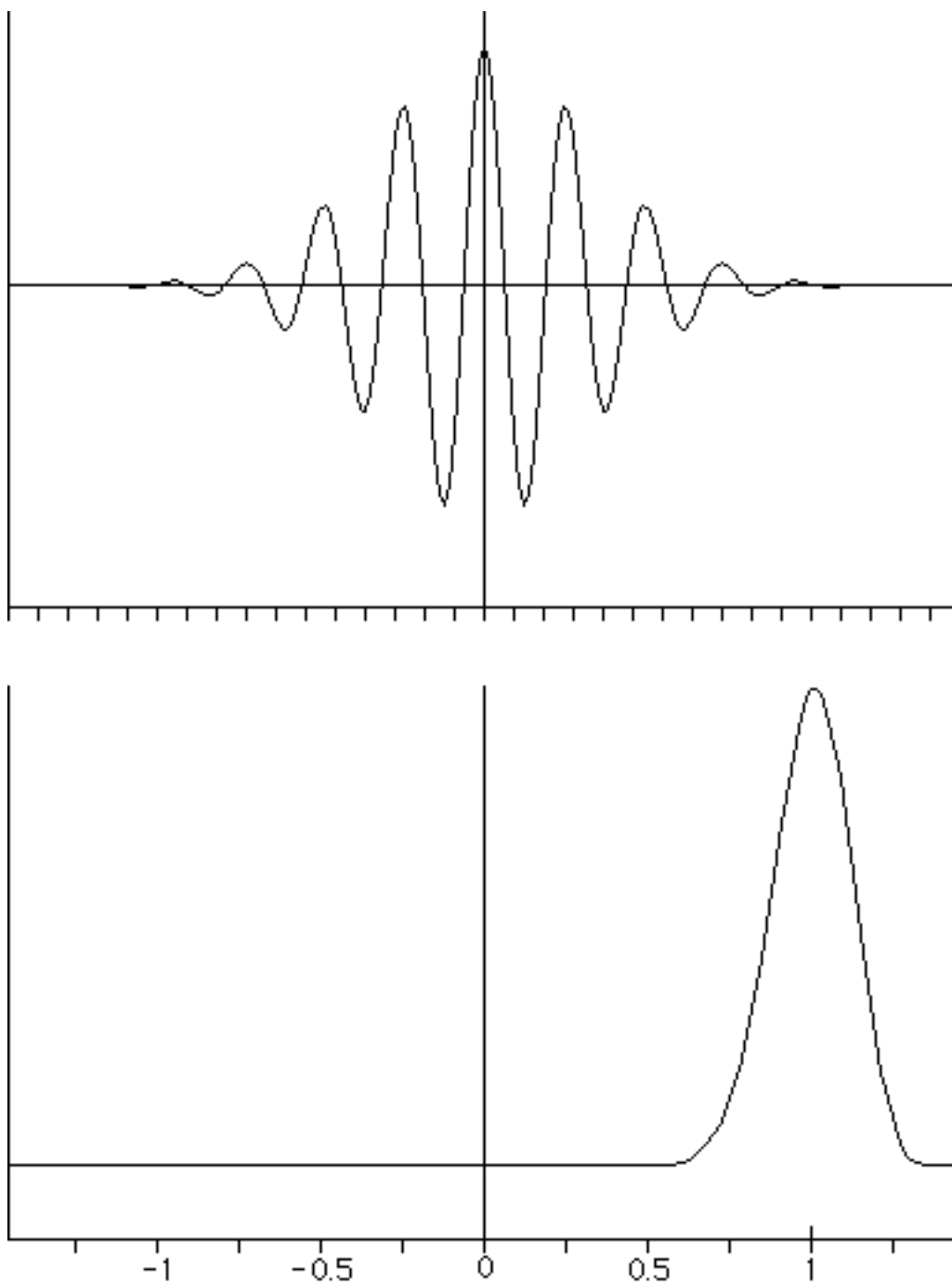


figure 33.

Loi de Bernoulli de moyenne 15 et de degré 19 :

$$G(z) = \left(1 + \frac{15}{19} (z - 1)\right)^{19}$$

$$a = 15.00$$

$$x_0 = 2.9 \cdot 10^{-14}$$

Dans le graphique du haut, les abscisses sont rétrécies d'un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à celui de la page précédente.

Voici un programme qui calcule la *fonction caractéristique asymptotique* $\Phi(t)$ de la variable aléatoire $a^{-n} Z_n$, en utilisant la méthode développée dans ce chapitre: on calcule d'abord les coefficients $q_1, q_2, q_3, \dots$ de la fonction $Q(\zeta)$, ce qui permet de calculer $\Phi(t) = 1 + Q(it)$ pour de petites valeurs de t ; puis on utilise l'équation fonctionnelle $\Phi(at) = G(\Phi(t))$ pour calculer $\Phi(t)$ pour des valeurs de plus en plus grandes de t . C'est le programme qui a engendré la figure 23.

```

program gener;

const disc = 16;    ** nombre de points initiaux **

var
a, b, c, d, N, j0, jj, L: integer;
p, q, x, y, s, t, retemp, imtemp, norm, init, initcour: real;
q1, q2, q3, q4, a1, a2, a3, apow, t0, x0, y0, lna: real;
tabj: array [0..disc] of integer;
tabt, tabx, taby: array [0..disc] of real;

function rep (u, v: real): real;    ** partie réelle de  $G$  **
var
s, t: real;
begin
t := d * u;
s := 3 * t + c;
t := t + c;
t := t * u + b;
rep := (a + u * t - s * v * v) / N;
end;

function imp (u, v: real): real;    ** partie imaginaire de  $G$  **
var
t: real;
begin
t := d * u;
t := 3 * t + 2 * c;
imp := v * (b + u * t - d * v * v) / N;
end;

begin
a := 1;    ** a, b, c, d sont les coefficients de  $G$  **
b := 2;
c := 0;    **  $G(z) = a + b z + c z^2 + d z^3$  **

```

```
d:= 6;
N:= 9;
a1:= (b + 2 * c + 3 * d) / N;    ** a1, a2, a3: coefficients de F **
a2:= (c + 3 * d) / N;            ** F(w) = a1 w + a2 w^2 + a3 w^3 **
a3:= d / N;
L:= 96;    ** demi-largeur (en pixels) du graphique **
norm:= 24;    ** unité (en pixels) sur les abscisses **
init:= 0.05;    ** abscisse du point initial **
p:= (b + 2 * c + 3 * d) / N;    ** moyenne de la loi **
q:= 1;

q1:= 1;    ** calcul itératif des coefficients de Taylor q1, **
apow:= a1;    ** q2, q3, q4 de la fonction Q(ζ) **
q2:= a2 / (a1 * (a1 - 1));
apow:= apow * a1;
q3:= (2 * a2 * q2 + a3) / (a1 * (apow - 1));
apow:= apow * a1;
q4:= (a2 * (q2 * q2 + 2 * q3) + 3 * a3 * q2) / (a1 * (apow - 1));

writeln;    ** affichage **
writeln (N: 1, ': ', a: 1, ', ', b: 1, ', ', c: 1, ', ', d: 1);
writeln;
writeln ('a = ', a1: 4: 2);
writeln;
writeln ('disc = ', disc: 1);

MoveTo (220 + 2 * L, 250);    ** traçage des axes de coordonnées **
LineTo (220 + 2 * L, 10);
MoveTo (220 - 2 * L, 250); LineTo (220 - 2 * L, 10);
MoveTo (220, 255); LineTo (220, 10);
MoveTo (220 - 2 * L, 250); LineTo (220 + 2 * L, 250);

MoveTo (28, 255);    ** traçage des graduations en abscisse **
LineTo (28, 250);
MoveTo (52, 255); LineTo (52, 250);
MoveTo (76, 255); LineTo (76, 250);
MoveTo (100, 255); LineTo (100, 250);
MoveTo (124, 255); LineTo (124, 250);
MoveTo (148, 255); LineTo (148, 250);
MoveTo (172, 255); LineTo (172, 250);
MoveTo (196, 255); LineTo (196, 250);
MoveTo (244, 255); LineTo (244, 250);
MoveTo (268, 255); LineTo (268, 250);
MoveTo (292, 255); LineTo (292, 250);
```

```
MoveTo (316, 255); LineTo (316, 250);
MoveTo (340, 255); LineTo (340, 250);
MoveTo (364, 255); LineTo (364, 250);
MoveTo (388, 255); LineTo (388, 250);
MoveTo (412, 255); LineTo (412, 250);

MoveTo (220, 220 - 2 * L);    ** point de départ **

lna := ln(a1);

t0 := init;
for jj := 0 to disc do
begin    ** calcul des points initiaux dans tabt **
tabt[jj] := t0;
j0 := round(norm * t0);
tabj[jj] := j0;
t0 := t0 * exp(lna / disc);
s := tabt[jj] * tabt[jj];
tabx[jj] := 1 + s * (q4 * s - q2);
taby[jj] := t0 * (q1 - q3 * s);
LineTo (220 + tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
end;

initcour := init;

while j0 ≤ 2 * L do
begin    ** itération à partir de l'équation fonctionnelle **
initcour := initcour * a1;
t0 := initcour;
for jj := 0 to disc do
begin
tabt[jj] := t0;
j0 := round(norm * t0);
tabj[jj] := j0;
t0 := t0 * exp(lna / disc);
retemp := rep(tabx[jj], taby[jj]);
intemp := imp(tabx[jj], taby[jj]);
tabx[jj] := retemp;
taby[jj] := intemp;
LineTo (220 + tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
end;
end;

MoveTo (220, 220 - 2 * L);
```

```

t0:= init;
for jj:= 0 to disc do
begin    ** répétition pour la partie gauche du graphique **
tabt[jj]:= t0;
j0:= round(norm * t0);
tabj[jj]:= j0;
t0:= t0 * exp(lna / disc);
s:= tabt[jj] * tabt[jj];
tabx[jj]:= 1 + s * (q4 * s - q2);
taby[jj]:= t0 * (q1 - q3 * s);
LineTo (220 - tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
end;

initcour:= init;

while j0 ≤ 2 * L do
begin
initcour:= initcour * a1;
t0:= initcour;
for jj:= 0 to disc do
begin
tabt[jj]:= t0;
j0:= round(norm * t0);
tabj[jj]:= j0;
t0:= t0 * exp(lna / disc);
retemp:= rep(tabx[jj], taby[jj]);
imtemp:= imp(tabx[jj], taby[jj]);
tabx[jj]:= retemp;
taby[jj]:= imtemp;
LineTo (220 - tabj[jj], 220 - round(2 * L * tabx[jj]));
end;
end;
end.

```