

II. DÉNOMBREMENT.

Comme il a été dit au chapitre I, le calcul des probabilités consiste d'abord à modéliser une situation sous la forme d'un ensemble fini, l'*espace des épreuves*, puis à calculer les probabilités des événements. Or dans un modèle, calculer la probabilité d'un événement A revient, en vertu de (I.2.) à calculer le nombre d'éléments (épreuves) que contient l'ensemble A . Compter exhaustivement n'est que très rarement une méthode efficace, surtout lorsque les ensembles sont gros. Il faut donc commencer par apprendre les techniques élémentaires de *dénombrement*, qui permettent de déterminer sans fatigue le nombre d'éléments des ensembles les plus typiques. Dans ce chapitre, nous apprendrons à résoudre les problèmes suivants :

— avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres peut-on écrire ? (suites avec répétition)

— avec un alphabet de r lettres, combien peut-on écrire de mots différents formés de n lettres *toutes distinctes* ? (suites sans répétition ou arrangements)

— combien de sous-ensembles différents à n éléments y a-t-il dans un ensemble à r éléments ? (ensembles non ordonnés sans répétition ou combinaisons)

— on se donne k nombres entiers ≥ 0 , $n_1, n_2 \dots n_k$, dont la somme est n ; de combien de manières différentes peut-on ranger n éléments en k groupes de (respectivement) $n_1, n_2 \dots n_k$ éléments ? (partitions en groupes de taille donnée)

— n étant donné, de combien de manières différentes peut-on choisir les nombres $n_1, n_2 \dots n_k$ du problème précédent ? (subdivisions)

La connaissance de ces cinq cas élémentaires de dénombrement permet déjà de résoudre une quantité de problèmes de probabilités. En fait, la quasi totalité des problèmes usuels se ramène, après un travail mathématique adéquat (et plus ou moins long selon la difficulté intrinsèque du problème), à un ou plusieurs de ces cas de dénombrement.

Ce chapitre est formé de cinq paragraphes, chacun correspondant à l'un de ces cinq cas. On présentera au fur et à mesure des exemples simples illustrant chaque formule.

II. 1. Suites avec répétition ou tirages avec remise.

Avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres peut-on écrire?

Imaginons que notre alphabet soit formé des trois lettres A, B, C ($r = 3$). On peut former trois mots différents de une lettre ($n = 1$): ces mots sont A, B , et C . Mais on peut former neuf mots de deux lettres ($n = 2$):

$$\begin{array}{lll} AA, & AB, & AC, \\ BA, & BB, & BC, \\ CA, & CB, & CC. \end{array}$$

Il y a 27 mots de trois lettres :

$$\begin{array}{l} AAA, AAB, AAC, ABA, ABB, ABC, ACA, ACB, ACC, \\ BAA, BAB, BAC, BBA, BBB, BBC, BCA, BCB, BCC, \\ CAA, CAB, CAC, CBA, CBB, CBC, CCA, CCB, CCC. \end{array}$$

Nous n'irons pas plus loin. On voit sur ces tableaux comment engendrer systématiquement *tous* les mots possibles : si la première lettre est donnée, par exemple A , il y a pour la seconde les trois possibilités AA, AB , et AC . Si les deux premières sont données, par exemple AA , il y a trois possibilités pour la troisième : AAA, AAB , et AAC . Autrement dit, pour chaque mot possible de $n - 1$ lettres, il y a trois possibilités pour la n° . Si l'alphabet est formé de r lettres, il y aura r possibilités chaque fois qu'on ajoute une lettre de plus. Ainsi : avec une seule lettre, il y a r possibilités ; pour *chacune* de ces r possibilités, il y a r possibilités pour la deuxième lettre, ce qui fait $r \times r = r^2$ possibilités. Pour *chacune* de ces r^2 possibilités, il y a à nouveau r possibilités pour la troisième lettre, ce qui fait $r^2 \times r = r^3$ possibilités, et ainsi de suite. Il y aura donc r^n mots de n lettres. On peut donc retenir que **le nombre de mots de n lettres qu'on peut écrire dans un alphabet de r lettres** est

$$r^n \quad (II.1.)$$

Beaucoup de problèmes qui peuvent paraître à première vue différents sont en fait équivalents à la formation de mots avec des lettres. Le problème que nous venons d'étudier est donc un *modèle* pour des problèmes différents.

Ainsi, imaginons que nous ayons n boules numérotées et r boîtes. Nous avons déjà rencontré ces histoires de boules et de boîtes au chapitre I : on voit cela dans la figure 1, où on a représenté toutes les manières différentes de disposer trois boules dans deux boîtes. En les dessinant toutes sur la figure 1, nous avons vu qu'il y avait huit manières différentes. En général, pour n boules et r boîtes, il y a r^n distributions différentes, de même qu'il

il y a r^n mots de n lettres avec un alphabet de r lettres. Les deux problèmes sont en réalité identiques.

On peut mettre cette identité en évidence en *codant* les distributions de boules dans des boîtes; supposons en effet que nous voulions représenter une distribution de boules par un code chiffré: on pourrait désigner chaque boîte par une lettre, et chaque boule par son numéro (elles sont supposées numérotées). Pour une distribution de boules donnée, on regarde dans quelle boîte se trouve la boule $N^{\circ}1$, disons que c'est la boîte G . Puis on regarde dans quelle boîte se trouve la boule $N^{\circ}2$, disons que c'est la boîte U , la boule $N^{\circ}3$ serait dans la boîte S , la boule $N^{\circ}4$ dans la boîte T , la boule $N^{\circ}5$ dans la boîte A , la boule $N^{\circ}6$ dans la boîte V , et la boule $N^{\circ}7$ serait dans la boîte E . On obtient ainsi un mot de sept lettres, $GUSTAVE$. Quiconque connaît la règle de codage peut reconstituer la distribution des boules dans les boîtes à partir du mot $GUSTAVE$: il prend la première lettre, G , et place donc la boule $N^{\circ}1$ dans la boîte G , et ainsi de suite. À chaque distribution possible de n boules dans r boîtes, correspond de façon biunivoque un mot de n lettres écrit avec les r lettres qui ont servi à désigner les boîtes. Il y a donc un *isomorphisme* entre les deux problèmes.

Un autre exemple est celui des tirages dans une urne. Une urne contient r boules de couleurs différentes, par exemple ($r = 5$) une boule blanche, une boule noire, une rouge, une verte, une jaune. On tire une boule, puis on la remet dans l'urne (après avoir noté sa couleur) on tire à nouveau, on remet, etc. Combien de résultats différents sont possibles en n tirages? réponse: r^n , puisque chaque résultat possible est la liste des n couleurs successives: si on a tiré, disons, la noire, puis la rouge, puis à nouveau la noire, puis la verte ($n = 4$), on aura la liste $NRNV$, de sorte que chaque tirage est codé par un mot de quatre lettres écrit dans l'alphabet B, N, R, V, J . C'est pourquoi ce type de problème est souvent – comme dans le titre du paragraphe – désigné par l'expression “tirages avec remise” ou en anglais “samples with replacement”.

II. 2. Suites sans répétition ou tirages sans remise.

Avec un alphabet de r lettres, combien de mots différents de n lettres *toutes distinctes* peut-on écrire? Il s'agit du même problème qu'au paragraphe précédent, excepté que les mots ne doivent pas contenir deux fois la même lettre.

Avec l'alphabet des trois lettres A, B, C , on peut écrire trois mots différents formés d'une seule lettre: A , B , et C . Mais on ne peut plus écrire neuf mots de deux lettres, car dans les mots AA , BB , et CC une même

lettre est répétée. Il n'y a donc que six possibilités :

$$\begin{array}{ccc} & AB, & AC, \\ BA, & & BC, \\ CA, & CB, & \end{array}$$

Il n'y a plus que six mots de trois lettres :

$$\begin{array}{ccc} & ABC, & ACB, \\ BAC, & & BCA, \\ CAB, & CBA, & \end{array}$$

Les deux tableaux sont identiques à ceux du paragraphe précédent, sauf qu'on y a effacé les mots contenant deux fois une même lettre. En effaçant simplement sur les tableaux déjà constitués du paragraphe précédent ce qui ne doit plus y figurer, on ne fait pas apparaître un procédé systématique, mais il n'est pas difficile d'en faire apparaître un. En effet, si la première lettre est donnée, par exemple A , il y a pour la seconde non plus trois, mais deux possibilités, car A ayant été choisie pour la première place, elle est maintenant exclue du choix suivant, qui se fera entre B et C ; de même si B avait été pris en premier, le choix pour la deuxième place se ferait entre A et C . Pour *chacun* des trois choix possibles de la première lettre, il y a donc deux choix possibles pour la deuxième lettre, soit entre B et C , soit entre A et C , soit entre A et B , ce qui fait $3 \times 2 = 6$ choix en tout. Si les deux premières lettres sont données, il n'y a plus qu'un choix possible pour la troisième, qui est C si les deux premières sont AB ou BA , B si les deux premières sont AC ou CA , A si les deux premières sont BC ou CB , ce qui fait bien six choix en tout. Si on voulait poursuivre et ajouter une quatrième lettre, on verrait qu'il reste zéro choix possibles, c'est-à-dire qu'on ne peut pas ajouter une quatrième lettre sans forcément répéter l'une des trois premières.

Plus généralement, avec un alphabet de r lettres, il y a r choix possibles pour la première lettre; celle-ci ne pouvant plus être réutilisée, il reste $r - 1$ choix possibles pour la deuxième; c'est-à-dire que pour *chacun* des r choix de la première, il y a $r - 1$ choix pour la deuxième, ce qui fait $r \cdot (r - 1)$ choix pour les deux premières; ensuite, pour *chacun* des $r \cdot (r - 1)$ choix des deux premières, il reste $r - 2$ choix pour la troisième, ce qui fait $r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2)$ choix pour les trois premières; et ainsi de suite. Lorsque les $n - 1$ premières lettres sont déjà choisies, il reste $r - n + 1$ possibilités pour la n -ième. De sorte que pour avoir un mot de n lettres, on aura en tout

$$r(r - 1)(r - 2) \cdots (r - n + 1) \quad (II.2.)$$

possibilités. On remarquera que si $n \leq r$ ce nombre est aussi égal à $r!/(r-n)!$. Bien entendu, si $r < n$ c'est nul, puisqu'après avoir écrit une fois chaque lettre de l'alphabet disponible, on ne peut en ajouter une $(r+1)$ -ième sans répétition.

Tout comme le problème du §1, celui-ci sert de modèle pour d'autres situations. Ainsi nous avons vu que les mots de n lettres écrits dans un alphabet de r lettres permettaient de coder biunivoquement des distributions de boules dans des boîtes : si on considère uniquement des mots dont toutes les lettres sont différentes, les distributions de boules correspondantes sont des distributions où aucune boîte ne reçoit deux boules (aucune lettre n'est écrite à deux places dans le mot) : ce sont donc les distributions où il y a au plus une boule par boîte. Il faut donc retenir que **le nombre de distributions de n boules dans r boîtes avec au plus une boule par boîte** est donné par (II.2.)

Autre problème répondant au même modèle : les tirages sans remises : une urne contient r boules de couleurs différentes ; on tire successivement une première boule, puis une deuxième, puis une troisième, sans jamais les remettre dans l'urne ; la deuxième ne peut donc pas avoir la même couleur que la première puisqu'elle n'est plus dans l'urne, ni la troisième avoir la couleur de l'une des deux premières, etc. Le nombre de tirages possibles est donc également donné par (II.2.)

On peut illustrer les deux précédents paragraphes immédiatement par le problème suivant :

on écrit 5 chiffres décimaux au hasard ; quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous différents ?

réponse : l'ensemble Ω de toutes les épreuves possibles est l'ensemble de toutes les suites de cinq chiffres pris dans l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (ce qui revient à l'ensemble de tous les nombres entiers de 0 à 99 999, en considérant que le nombre 67 par exemple s'écrit 00067) ; il y en a 100 000 en tout d'après (II.1.) L'événement qui nous intéresse est l'ensemble A de tous les nombres dont les chiffres sont tous différents : il y en a $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ d'après (II.2.). La probabilité de cet événement est donc

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{30\,240}{100\,000} = 0,3024$$

De même, pour des nombres à j chiffres, si on désigne par A_j l'événement : "les j chiffres sont tous différents" :

$$\mathcal{P}(A_6) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1\,000\,000} = 0.1512$$

$$\mathcal{P}(A_7) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10\,000\,000} = 0.06048$$

$$\mathcal{P}(A_8) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{100\,000\,000} = 0.018144$$

$$\mathcal{P}(A_9) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1\,000\,000\,000} = 0.003\,628\,8$$

$$\mathcal{P}(A_{10}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10\,000\,000\,000} = 0.000\,362\,88$$

$$\mathcal{P}(A_j) = 0 \quad \text{pour } j > 10$$

Une variante de ce problème est le suivant :

On prend au hasard un groupe de vingt étudiants ; quelle est la probabilité pour que deux (au moins) d'entre eux aient leur anniversaire le même jour ?

réponse : le problème se modélise de la manière suivante. On considère que les jours de l'année sont équiprobables pour les naissances (ce qui est faux, mais grossièrement approximatif) ; de plus on néglige les cas de naissance un 29 février. Pour une liste donnée des vingt étudiants, par exemple dans l'ordre alphabétique, on a à considérer toutes les listes possibles pour leurs jours de naissance, c'est-à-dire toutes les listes possibles de vingt dates parmi 365 possibles ; ces listes sont au nombre de 365^{20} . Par ailleurs, l'événement A "au moins deux sont nés le même jour" est le complémentaire de l'événement B "toutes les dates sont différentes". L'événement B contient $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 346$ éléments, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 346}{365^{20}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{19}{365}\right) \end{aligned} \quad (II.3.)$$

On évalue cette expression en prenant le logarithme, sachant que $\ln(1 - \varepsilon) \simeq -\varepsilon$. Le logarithme du produit est la somme des logarithmes, donc

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{19}{365}\right) \right\} &\simeq -\frac{1 + 2 + \cdots + 19}{365} \\ &= -\frac{19 \cdot 20}{2 \cdot 365} \simeq -0.5 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient la valeur approchée

$$\mathcal{P}(B) \simeq e^{-0.5} \simeq 0.6$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P}(A) \simeq 0.4$$

Autrement dit, il y a 40% de chances pour que deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. Le calcul approché qui a été fait pour obtenir ce résultat peut sembler très grossier (en fait la valeur exacte de l'expression (II.3.) est 0.588 561 535 soit une erreur de 1%), mais l'hypothèse de l'équiprobabilité des jours de l'année est au moins aussi grossière ; on pourrait aussi s'interroger sur l'intérêt de connaître le résultat au millièmè près.

Un cas particulier qui vaut la peine d'être souligné est le cas où la suite ordonnée utilise *toutes* les lettres disponibles, c'est-à-dire $n = r$. La question devient alors : **de combien de manières différentes peut-on ordonner**

r **objets?** Il s'agit du *nombre de permutations* de r objets. En prenant simplement $n = r$ dans (II.2.) on obtient :

$$\text{nombre de permutations de } r \text{ objets} = r! \quad (\text{II.4.})$$

Dans l'exemple ci-dessus (probabilité pour qu'un nombre de j chiffres décimaux pris au hasard ait tous ses chiffres différents) cela correspond au cas de dix chiffres (nombres compris entre zéro inclus et dix milliards exclus).

Bien entendu, dans aucun cas on ne peut avoir $n > r$, puisque si on doit écrire plus de lettres qu'il n'y en a dans l'alphabet disponible, on ne peut qu'en répéter.

II. 3. Combinaisons.

Lorsqu'on fait le produit de deux expressions algébriques, par exemple $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2)$ on utilise la distributivité de la multiplication : $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$. De même $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) \cdot (x_3 + y_3) = x_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1x_1x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1x_1y_3$. Les monômes qu'on obtient dans l'expression développée sont les mots de deux (pour le produit de deux facteurs) ou trois (pour le produit de trois facteurs) lettres écrits avec l'alphabet $\{x, y\}$; l'indice ne sert ici qu'à indiquer la place de la lettre dans le mot. Le nombre de mots est, conformément à (II.1.), $2^2 = 4$ pour deux facteurs, $2^3 = 8$ pour trois facteurs. Si on fait un produit de deux ou trois facteurs identiques, on obtient les développements sans indices :

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot (x + y) &= xx + xy + yx + yy \\ (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) &= xxx + xyx + yxx + yyx + xxy + xyy + yxy + yyy \end{aligned}$$

Plus généralement, si on développe un produit de n fois le facteur $(x + y)$, le développement est la somme de tous les monômes possibles, c'est-à-dire la somme de tous les mots de n lettres qu'on peut former avec les deux lettres x et y . Si on tient compte de la commutativité de la multiplication, les monômes xyx , yxx , et xyx sont égaux; on regroupe donc leur somme en $3x^2y$; de même les monômes yyx , xyy , et yxy peuvent être regroupés en $3xy^2$. Ainsi se pose la question : parmi les 2^n mots de n lettres qu'on peut former avec les deux lettres x et y , combien comportent k fois la lettre x et $n - k$ fois la lettre y ? La formule connue du binôme de Newton répond à cette question : elle nous dit que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad ,$$

c'est-à-dire que le nombre de monômes égaux à $x^k y^{n-k}$ (et qui par conséquent peuvent être regroupés) est égal au k -ième coefficient du binôme d'ordre n

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (II.5.)$$

Ainsi, le nombre de mots de n lettres qu'on peut former avec un alphabet de deux lettres, et qui comportent k fois l'une et $n-k$ fois l'autre est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Nous avons vu au §1 qu'il y avait isomorphisme ou équivalence entre les mots et les distributions de boules dans des boîtes; traduisons ce que nous venons de constater pour les monômes en termes de boules: cela correspond donc à n boules à distribuer dans $r = 2$ boîtes. Ainsi il y a $\binom{n}{k}$ manières de distribuer n boules dans deux boîtes, de telle façon qu'il y en ait k dans l'une et $n-k$ dans l'autre. Placer k (parmi n) boules dans une boîte (il en restera alors forcément $n-k$ pour l'autre boîte) revient à choisir un sous-ensemble de k boules parmi l'ensemble des n boules.

On remarquera qu'il s'agit de sous-ensembles, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel les *éléments* du sous-ensemble sont donnés ne joue pas: les numéros des k boules qui sont dans la boîte x forment un sous-ensemble à k éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Mais ce sous-ensemble non ordonné détermine l'ordre dans lequel les lettres x et y apparaissent dans le monôme. Si par exemple $n = 5$ et $k = 3$, le sous-ensemble $\{2, 4, 5\}$ est le même que $\{4, 5, 2\}$ ou $\{5, 4, 2\}$. Le monôme correspondant à ce sous-ensemble est $xyxx$ (c'est-à-dire que la lettre x occupe les places 2, 4, et 5, peu importe dans quel ordre ces numéros de places ont été dictés); si on mélange l'ordre des lettres *dans le monôme*, pour obtenir par exemple le monôme $xyxyx$ (qui est donc égal au précédent compte tenu de la commutativité de la multiplication), ce nouveau monôme correspond à un *autre* sous-ensemble, à savoir $\{1, 3, 5\}$.

Traduit en termes de tirages dans des urnes, le problème revient à ceci: au §1 on caractérisait un tirage par la suite ordonnée des couleurs obtenues successivement (cela formait un mot). Si on traduit de la même façon, nous avons ici deux boules, par exemple une noire et une rouge. On tire n fois avec remise. En notant à chaque fois la couleur tirée, x pour rouge et y pour noire, on obtient un monôme en x et y .

Une autre façon d'habiller le même problème, toujours équivalente, consiste, puisqu'il n'y a que deux couleurs ou deux lettres, à dénombrer les suites de résultats possibles obtenus en lançant n fois une pièce de monnaie: on écrit x quand sort pile et y quand sort face. Si un joueur donne un franc

Dénombrement

à l'autre joueur chaque fois que sort pile (et inversement quand sort face), le gain est égal au nombre de x moins le nombre de y ; si k est le nombre de x , le nombre de y sera $n - k$, donc le gain sera $w = k - (n - k) = 2k - n$. Ce gain ne dépend donc pas de la place des x et des y dans le monôme, mais seulement du nombre k de x , c'est-à-dire du nombre de pile. Par conséquent le nombre de résultats différents apportant un même gain $w = 2k - n$ est $\binom{n}{k}$.

Les coefficients binômiaux sont aussi donnés par le triangle de Pascal, qu'on obtient en écrivant pour chaque n les $2n + 1$ coefficients binômiaux d'ordre n sur une ligne, la première ligne correspondant à $n = 1$, la seconde à $n = 2$, etc. Cela donne pour les lignes 0 à 13 :

1													
1	1												
1	2	1											
1	3	3	1										
1	4	6	4	1									
1	5	10	10	5	1								
1	6	15	20	15	6	1							
1	7	21	35	35	21	7	1						
1	8	28	56	70	56	28	8	1					
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Le triangle de Pascal a la propriété suivante : chaque élément d'une ligne est la somme de deux éléments de la ligne précédente : celui qui est au-dessus et son voisin de gauche ; ainsi $1716 = 924 + 792$, $165 = 120 + 45$, etc. Cela correspond à la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

Cette relation de récurrence est très facile à vérifier directement. En effet, en écrivant les coefficients binômiaux avec des factorielles, selon (II.5.) cela revient à

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [(n-k) + k] = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si on se propose de calculer *numériquement* les coefficients binômiaux, il se trouve que cette formule de récurrence est l'algorithme le plus efficace qu'on connaisse. La raison en est que si on le met en oeuvre, il n'effectue que des additions, alors qu'un calcul même habile des factorielles demande des multiplications et des divisions. Son défaut est que, même si on veut ne calculer qu'un seul coefficient binomial, par exemple $\binom{72}{27}$, on doit calculer les lignes complètes du triangle de Pascal ; le nombre d'additions nécessaire est alors environ 2500. Calculer directement en passant par les factorielles est visiblement maladroit : $72!$ exige 72 multiplications, $27!$ en exige 27 et $(72-27)!$ en exige 72-27, soit 144 multiplications en tout. En outre, en procédant ainsi, on calcule d'abord séparément

des nombres *bien plus gros* que celui qu'on veut finalement obtenir ($\binom{72}{27}$ est grand aussi, mais nettement moins que $72!$) ; on gaspille ainsi du temps à calculer des nombres entiers très longs, que l'on divise ensuite. On pourrait certes faire une économie en calculant par exemple $\frac{72}{27} \cdot \frac{71}{26} \cdot \frac{70}{25} \cdots \frac{47}{2} \cdot 46$, mais les différents facteurs sont alors des fractions et ne peuvent donc être manipulés qu'en virgule flottante (donc en perdant l'exactitude). En utilisant le triangle de Pascal, les calculs intermédiaires ne font jamais appel à des nombres plus gros que celui qu'on veut atteindre, et on ne fait intervenir que des entiers. En fin de compte on y gagne, surtout si on n'en veut pas un seul coefficient, mais par exemple toute une ligne.

Lorsque k varie de 0 à n , le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est croissant tant que $2k < n$, puis décroissant quand $2k > n$; si n est pair (disons $n = 2p$), il est maximum pour $k = p$ et vaut alors $(2p)!/p!^2$; si n est impair (disons $n = 2p - 1$), il est maximum ex aequo pour $k = p - 1$ et $k = p$ et vaut alors $(2p - 1)!/p!(p - 1)! = \frac{1}{2} \cdot (2p)!/p!^2$. Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer $\binom{n}{k+1}$ à $\binom{n}{k}$: en divisant les factorielles, on voit que

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

la suite des $\binom{n}{k}$ est donc croissante tant que $(n-k)/(k+1) \geq 1$ ($\Leftrightarrow 2k \leq n-1$) et décroissante quand $(n-k)/(k+1) \leq 1$ ($\Leftrightarrow 2k \geq n-1$), C.Q.F.D.

Le calcul numérique exact des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (par exemple avec l'algorithme du triangle de Pascal) devient très ardu lorsque n est très grand ; le calcul opère sur des entiers, mais lorsqu'ils sont grands on ne peut se contenter de deux octets et les temps de calcul deviennent vite prohibitifs. En outre, il est bien rare que pour n grand une expression exacte présente seulement un intérêt. Or il se trouve qu'il existe une expression approchée simple et très utile des coefficients binomiaux. Voyons le cas où n est pair ($n = 2p$) ; le cas n impair doit être traité séparément, mais il est analogue. Posons $k = p + j$ pour symétriser (j est alors nul quand $k = p$ et j varie de $-p$ à $+p$). On a bien sûr $\binom{2p}{p-j} = \binom{2p}{p+j}$, et il suffit d'examiner le cas où $j > 0$.

En décomposant convenablement les factorielles qui figurent au numérateur et au dénominateur des coefficients binomiaux, on peut écrire, si j est positif :

$$\binom{2p}{p+j} = \binom{2p}{p} \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-j+1)}{(p+1)(p+2) \cdots (p+j)}$$

$$= \binom{2p}{p} \frac{p^j \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{p}\right) \right]}{p^j \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 + \frac{j}{p}\right) \right]}$$

Pour évaluer les expressions entre crochets en numérateur et dénominateur on prend leurs logarithmes; on sait que

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \cdots$$

de sorte que pour l'expression au dénominateur on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 + \frac{j}{p}\right) \right\} &= \frac{1 + 2 + \cdots + j}{p} - \frac{1 + 4 + \cdots + j^2}{2p^2} + \cdots \\ &= \frac{j(j+1)}{2p} - \frac{O(j^3)}{6p^2} \\ &\simeq \frac{j^2}{2p} \end{aligned}$$

Pour l'expression au numérateur (en utilisant cette fois $\ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} - \cdots$) on obtiendrait de même

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{p}\right) \right\} &= -\frac{1 + \cdots + (j-1)}{p} - \frac{1 + \cdots + j^2}{2p^2} + \cdots \\ &= -\frac{j(j-1)}{2p} - \frac{O(j^3)}{6p^2} \\ &\simeq \frac{-j^2}{2p} \end{aligned}$$

En revenant aux exponentielles des logarithmes et en regroupant tout, il apparaît que

$$\binom{2p}{p+j} \simeq \binom{2p}{p} \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right]$$

Cette approximation est valable pourvu que l'erreur commise, qui comme nous l'avons vu au cours du calcul, est de l'ordre de j^3/p^2 , soit négligeable. Or si j est de l'ordre de $\sqrt{p}$ ou plus petit, j^3/p^2 sera de l'ordre de $1/\sqrt{p}$ qui est négligeable si p est grand. Si j est plus grand que $\sqrt{p}$ en ordre de grandeur, l'erreur n'est plus négligeable en ce sens que j^3/p^2 n'est pas petit devant j^2/p , mais en fait cela ne porte pas à conséquence car dans ce cas le rapport $\binom{2p}{p+j}/\binom{2p}{p}$ est tellement petit que, erreur ou pas, on peut le remplacer aussi bien par 0 que par $\exp(-j^2/n)$.

Quand à la valeur maximum $\binom{2p}{p} = (2p)!/p!^2$ elle-même, elle peut être approchée en utilisant la formule de Stirling : $p! \simeq p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}$. Ainsi

$$\binom{2p}{p} = (2p)!/p!^2 \simeq \frac{2^{2p} p^{2p} e^{-2p} \sqrt{4\pi p}}{p^{2p} e^{-2p} 2\pi p} = \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}$$

On peut donc conclure que pour p grand :

$$\binom{2p}{p+j} = \binom{2p}{p-j} \simeq \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}} \cdot \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right] \quad (II.6.)$$

Pour le cas impair on aurait obtenu par des voies semblables :

$$\binom{2p-1}{p+j} = \binom{2p-1}{p-j-1} \simeq \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi p}} \cdot \exp\left[-\frac{j^2}{p}\right] \quad (II.6a.)$$

II. 4. Partitions en groupes de taille donnée.

Maintenant la question est celle-ci : on se donne m nombres entiers ≥ 0 , $n_1, n_2 \dots n_m$, dont la somme est n ; de combien de manières différentes peut-on ranger n éléments en m groupes de (respectivement) $n_1, n_2 \dots n_m$ éléments ?

On peut interpréter le problème étudié dans le paragraphe précédent en disant qu'on cherchait le nombre de partitions de l'ensemble à n éléments en *deux* sous-ensembles ayant respectivement k et $n - k$ éléments, ce qui était donc le cas particulier correspondant à $m = 2$, $n_1 = k$ et $n_2 = n - k$. C'est ce qui apparaissait quand le problème était interprété en termes de boules à distribuer dans des boîtes : il y avait alors 2^n distributions possibles de n boules dans deux boîtes, et parmi celles-ci il y en avait $\binom{n}{k}$ pour lesquelles la première boîte recevait k boules et la deuxième $n - k$. Si le nombre de boîtes est quelconque, disons m , il s'agit des distributions de boules dans m boîtes : le problème se généralise alors ainsi : **quel est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en m sous-ensembles ayant respectivement $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments ?** Les nombres $n_1, n_2, \dots n_m$ sont appelés les nombres d'occupation ; n_j est le nombre d'occupation de la j -ième boîte.

Dans le paragraphe précédent nous avons abordé le problème en étudiant le développement du binôme : $(x + y)^n$. De la même façon on peut aborder le problème du nombre de partitions à partir, non plus du binôme, mais de $(x_1 + x_2 + \dots x_m)^n$: on est alors ramené à compter, sur les m^n monômes de l'expression développée, combien sont égaux à $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_m^{n_m}$, ou encore (en termes de mots et de lettres) : **parmi les m^n mots de n lettres qu'on**

peut former avec l'alphabet $\{x_1, x_2, x_3, \dots x_m\}$ combien y en a-t-il qui contiennent n_1 fois la lettre x_1 , n_2 fois la lettre x_2 , n_3 fois la lettre x_3 , $\dots n_m$ fois la lettre x_m ? (nous y reviendrons un peu plus loin).

Toujours au paragraphe précédent, au lieu de poser le problème en termes de mots écrits avec les deux lettres x et y , on aurait aussi pu le poser de la manière suivante: pour un ensemble E de n objets il y a $n!$ permutations. Si on considère une partition en *deux* sous-ensembles E_k et E_{n-k} , alors toute permutation qui permute les éléments de E_k entre eux et les éléments de E_{n-k} entre eux laisse ces deux ensembles intacts; or il y a $k!(n-k)!$ telles permutations. Toute autre permutation de E modifie les deux sous-ensembles, mais non leur nombre (2), ni le nombre de leurs éléments respectifs (k et $n-k$); autrement dit, toute autre permutation transforme une partition en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments en une autre partition en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments. Le nombre total de permutations (soit $n!$) est donc le produit du nombre de partitions en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, ou inversement, le nombre de partitions en deux sous-ensembles à k et $n-k$ éléments est le quotient du nombre total de permutations par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, soit $n!/k!(n-k)!$. On retrouve ainsi (II.5).

Cette façon de compter donne immédiatement la réponse à la question du présent paragraphe. Pour une partition en m sous-ensembles $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots E_{n_m}$, toute permutation qui permute les éléments de chacun des E_{n_j} entre eux (pour j de 1 à m) laisse ces m ensembles intacts; or il y a $n_1!n_2!\dots n_m!$ telles permutations. Toute autre permutation de E modifie les m sous-ensembles, mais non leur nombre (m), ni le nombre de leurs éléments, c'est-à-dire les nombres d'occupation ($n_1, n_2, \dots n_m$); autrement dit, toute autre permutation transforme une partition en m sous-ensembles à $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments en une autre partition en m sous-ensembles à $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments. Le nombre total de permutations (soit $n!$) est donc le produit du nombre de partitions en m sous-ensembles à $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, ou encore, le nombre de partitions en m sous-ensembles à $n_1, n_2, \dots n_m$ éléments est le quotient du nombre total de permutations par le nombre de permutations qui laissent chacune intacte, soit

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}. \quad (II.7.)$$

Pour donner un exemple de ce type de dénombrement, prenons notre promotion de 72 étudiants. De combien de manières différentes peut-on

les diviser en trois groupes de T.D. de 24 étudiants chacun ? Réponse : $72!/24!24!24! \simeq 2.564 \cdot 10^{32}$. De même, le nombre de manières différentes de répartir 72 étudiants dans trois groupes de respectivement 30, 25, et 17 étudiants est $72!/30!25!17! \simeq 4.184 \cdot 10^{31}$. Dans des groupes de 32, 22, et 18 : $72!/32!22!18! \simeq 3.234 \cdot 10^{32}$. Si les tailles des trois groupes sont davantage différenciées, le nombre devient plus petit : $72!/60!8!4! \simeq 7.605 \cdot 10^{15}$. En revanche pour des groupes plus nombreux le nombre de possibilités augmente : $72!/32!22!10!8! \simeq 1.4155 \cdot 10^{36}$. On pourrait montrer (d'ailleurs on le fera plus loin) que pour un nombre de groupes donné, le nombre de possibilités est maximum lorsque les groupes sont de tailles égales, c'est-à-dire lorsque les nombres d'occupation sont égaux entre eux.

On retrouve encore ces nombres lorsqu'on développe le polynôme $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$. Cela n'a rien de surprenant puisqu'ils ne font que généraliser les nombres II.5. Ainsi :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

la sommation portant sur toutes les familles d'indices possibles qui vérifient $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. C'est pourquoi ces nombres sont appelés *coefficients multinômiaux*, de même que ceux de la section précédente étaient appelés coefficients binômiaux. Quoique cette notation soit moins célèbre que celle des coefficients binômiaux, on désigne les coefficients multinômiaux de manière analogue :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}$$

De même que tous les problèmes de combinaisons de lettres que nous avons abordé jusqu'ici, le problème du nombre de partitions en groupes de taille donnée peut s'interpréter en termes de boules à ranger dans des boîtes. Lorsqu'il s'agissait de mots (de n lettres) écrits avec un alphabet de m lettres, nous avons vu l'équivalence avec la répartition de n boules dans m boîtes. Ici, il s'agit du nombre de mots différents qui contiennent *un nombre donné de fois* chacune des m lettres de l'alphabet. En termes de boules et de boîtes, chaque boîte correspond à une lettre de l'alphabet, et chaque boule correspond à la place occupée par une lettre dans le mot. Le problème revient alors au nombre de répartitions pour lesquelles la boîte correspondant à la lettre x_j contient n_j boules : il s'agit donc du nombre de répartitions différentes pour lesquelles chaque boîte contient un nombre fixé à l'avance de boules : **de combien de manières différentes peut-on répartir n boules dans m boîtes, de telle sorte que la première en contienne n_1 , la deuxième n_2 , la troisième n_3 , etc ?**

Dénombrement

De même que pour les coefficients binômiaux, on peut avoir une approximation simple et pratique pour n grand. On peut vérifier que $n!/n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!$ est maximum lorsque les nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ sont égaux (si n est un multiple de m) ou égaux à une unité près (si n n'est pas un multiple de m). En utilisant la formule de Stirling, comme nous l'avons fait pour le maximum des coefficients binômiaux, on obtient pour ce maximum l'approximation

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!} \simeq \frac{m^{n+\frac{m}{2}}}{\sqrt{(2\pi n)^{m-1}}}$$

(à partir d'ici $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ désignent les valeurs correspondant au *maximum*). Pour connaître la variation *autour* du maximum, on procède comme au §3, on introduit $j_1, j_2, j_3, \dots, j_m$ et on remarque que

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n_1 + j_1)!(n_2 + j_2)!(n_3 + j_3)!\cdots(n_m + j_m)!} = \\ & = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!} \cdot \frac{n_1!}{(n_1 + j_1)!} \cdot \frac{n_2!}{(n_2 + j_2)!} \cdot \frac{n_3!}{(n_3 + j_3)!} \cdots \frac{n_m!}{(n_m + j_m)!} \end{aligned}$$

Chacun des facteurs $n_i!/(n_i + j_i)!$ peut être approché en utilisant le procédé que nous avons déjà vu. Si $j_i > 0$ on écrit

$$\begin{aligned} \frac{n_i!}{(n_i + j_i)!} &= \frac{1}{(n_i + 1)(n_i + 2)(n_i + 3)\cdots(n_i + j_i)} \\ &= \frac{1}{n_i^{j_i} \left[\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i}{n_i}\right) \right]} \\ &\simeq \frac{1}{n_i^{j_i}} \cdot e^{-\frac{j_i^2}{2n_i}} \end{aligned}$$

et si $j_i < 0$

$$\begin{aligned} \frac{n_i!}{(n_i + j_i)!} &= n_i(n_i - 1)(n_i - 2)(n_i - 3)\cdots(n_i - |j_i| + 1) \\ &= n_i^{|j_i|} \left[\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 - \frac{|j_i| - 1}{n_i}\right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{n_i^{|j_i|}} \cdot e^{-\frac{j_i^2}{2n_i}} \end{aligned}$$

(on voit que l'approximation a la même expression analytique, indépendamment du signe de j_i). Si maintenant on applique ce résultat à chacun des

facteurs $n_i!/(n_i + j_i)!$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{n!}{(n_1 + j_1)!(n_2 + j_2)!(n_3 + j_3)! \cdots (n_m + j_m)!} = \\
 & = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_m!} \cdot \frac{e^{-\frac{j_1^2}{2n_1} - \frac{j_2^2}{2n_2} - \frac{j_3^2}{2n_3} \cdots - \frac{j_m^2}{2n_m}}}{n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m}} \quad (II.8.)
 \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que la somme des n_i est toujours égale à n donc la somme des j_i est nulle; l'exposant de l'exponentielle est la somme des $j_i^2/2n_i$, mais les j_i ne sont pas indépendants.

Pour obtenir (II.8.) nous n'avons pas utilisé le fait que les valeurs des nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ correspondent au maximum du coefficient multinomial; formellement, (II.8.) est vrai pour *n'importe quelle valeur de* $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$. Mais si le facteur $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m}$ n'est pas *stationnaire*, cette formule ne sert à rien, car lorsque les j_i varient, ce facteur peut augmenter bien plus vite que la fonction $\exp(-j_i^2/2n_i)$ ne diminue, de sorte qu'il ne sert plus à rien d'avoir mis en évidence ce facteur gaussien. Dire que le facteur est stationnaire signifie qu'il ne varie pas (ou très peu) lorsque les j_i s'écartent de 0; or cela se produit précisément lorsque les n_i sont égaux: dans ce cas $n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m} = n_1^{j_1+j_2+j_3+\cdots+j_m} = n_1^0 = 1$. Il est évident que la fonction $\exp(-\sum_i j_i^2/2n_i)$ est maximum quand les j_i sont tous nuls; mais pour que le *produit* de $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m}$ par $\exp(-\sum_i j_i^2/2n_i)$ soit maximum, il faut que $1/n_1^{j_1} n_2^{j_2} n_3^{j_3} \cdots n_m^{j_m}$ soit maximum en même temps, ou du moins qu'il reste constant. La stationnarité de ce facteur est donc la condition sine qua non pour que le produit soit maximum.

II. 5. Subdivisions.

La section précédente traitait du nombre de répartitions en sous-ensembles de taille fixée à l'avance (par la donnée des nombres d'occupation). Mais il reste la question de connaître le nombre de choix possibles pour les nombres d'occupation. Ceux-ci vérifient nécessairement la relation $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. **Combien y a-t-il de possibilités de choisir m nombres vérifiant cette égalité?** On peut encore formuler la question en terme de développement multinomial: nous avons vu au paragraphe précédent comment les *coefficients multinomiaux* interviennent dans le développement

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

La question que nous traitons maintenant est celle du *nombre de termes* qu'il y a dans cette somme. On remarquera que les nombres d'occupation peuvent être nuls : quand on considère toutes les distributions possibles de boules dans des boîtes, on inclut le cas où des boîtes sont entièrement vides ; ou encore, dans le développement multinomial ci-dessus, beaucoup de monômes ne contiennent pas toutes les n variables, par exemple le monôme x_1^n . Mais on peut aussi dénombrer les distributions qui ne laissent *aucune* boîte vide : nous étudierons également ce cas.

Considérons d'abord le cas où les sous-ensembles vides sont admis. On résoud ce problème en le ramenant à un autre de la façon suivante. Le problème d'une distribution de n objets dans m sous-ensembles est évidemment identique à celui d'une distribution de n boules dans m cases. On peut représenter graphiquement une telle distribution (même si on ne peut le faire qu'abstraitemment et non sur du papier, comme ce serait le cas si par exemple on devait avoir $m = 10^{1000000}$) comme dans la figure 1 (chapitre I). On schématise alors la séparation entre deux cases adjacentes par une barre verticale, ce qui donne un graphique du type suivant :



on a ici 18 boules dans 14 cases, les nombres d'occupation étant 2, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 0, 1, 3, 0, 0, 1, 1. On peut voir que le problème, vu sous cet angle, est simplement le problème de la répartition de n ronds et $m - 1$ barres sur $n + m - 1$ places : à chaque schéma de ce type correspond une et une seule distribution de n boules dans m cases et vice-versa. Si on change l'ordre des ronds (entre eux) ou celui des barres (entre elles) on ne change rien au schéma de sorte que le nombre de schémas différents est donné par la section II. 3. : il y en a $(n + m - 1)!/n!(m - 1)!$

Pour le cas où les sous-ensembles vides ne sont pas admis, le schéma ci-dessus ne marche plus car il y a des cases vides (correspondant à des barres non séparées par un rond). Ne correspondent alors à notre problème que les schémas sans barres contiguës. On peut interpréter un tel schéma comme une combinaison, non plus de $|$ et de $\bigcirc$, mais de $| \bigcirc$ et de $\bigcirc$. Comme les schémas ont un rond à leur extrémité gauche, qui est obligatoire et ne change donc rien au *nombre* de possibilités, le choix ne portera que sur les $n - 1$ autres ronds. De plus, comme chacun des $m - 1$ symboles $| \bigcirc$ représente une case *et* une boule, il faudra n'ajouter que $n - m$ symboles $\bigcirc$ pour avoir $n - 1$ boules en tout. De sorte que le nombre total de signes $| \bigcirc$ ou $\bigcirc$ à choisir sera $n - 1$, et par conséquent le nombre de toutes les combinaisons sera $(n - 1)!/(m - 1)!(n - m)!$

En fin de compte :

$$\begin{array}{l} \text{nombre de subdivisions} \\ \text{en } m \text{ sous-ensembles} \\ \text{pouvant être vides} \end{array} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} ; \quad (II.9.)$$

$$\begin{array}{l} \text{nombre de subdivisions} \\ \text{en } m \text{ sous-ensembles} \\ \text{non vides} \end{array} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} . \quad (II.10.)$$

Le nombre donné en II.9. est aussi le nombre de dérivées partielles d'ordre n d'une fonction de m variables. Par exemple on peut voir dans les tableaux suivants le nombre de dérivées partielles d'ordre 1 à 5 pour des fonctions de deux, trois, quatre, et cinq variables :

fonctions de deux variables		fonctions de trois variables		fonctions de quatre variables		fonctions de cinq variables	
ordre	nombre	ordre	nombre	ordre	nombre	ordre	nombre
1	2	1	3	1	4	1	5
2	3	2	6	2	10	2	15
3	4	3	10	3	20	3	35
4	5	4	15	4	35	4	70
5	6	5	21	5	56	5	126

La formule de dénombrement (II.9.) est essentielle en physique statistique. Elle est à la base de la *statistique de Bose-Einstein*. Au chapitre I nous avons donné l'exemple de trois particules de Bose à placer dans deux états quantiques (voir figure 1, colonne de gauche). Cet exemple était opposé à celui de trois boules (non quantiques) à ranger dans deux boîtes. À cette occasion, nous avons insisté sur le fait que pour les boules, les épreuves équiprobables étaient les huit distributions possibles (on considérait que deux distributions qui diffèrent par une permutation des boules constituent deux épreuves distinctes), tandis que pour les particules de Bose, les épreuves équiprobables étaient les quatre modes d'occupation possibles (on considérait que deux distributions qui diffèrent par une permutation des particules ne constituent pas deux épreuves distinctes).

La formule (II.9.) généralise cela pour n particules et m états quantiques. Si on prend $n = 3$ et $m = 2$ on a bien

$$\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Ainsi $(n+m-1)!/n!(m-1)!$ est le nombre de modes d'occupation de m états quantiques par n particules de Bose.

Le postulat de base de la statistique de Bose-Einstein est que les modes d'occupation sont équiprobables (ils constituent les épreuves parmi

lesquelles “le hasard choisit”). Mais il faut bien comprendre que ce hasard, tout comme dans les exemples de chaos déterministe que nous avons analysés au chapitre I, n’est pas une propriété première de la nature, mais résulte d’un brouillage chaotique, qui est l’agitation thermique. L’agitation thermique est d’autant plus intense que la température du gaz de particules est plus élevée; elle a pour effet que les particules sont sans cesse délogées des états quantiques qu’elles occupent par toutes sortes d’interactions; des milliards de fois par seconde, des milliards de photons ou d’électrons se promènent à travers l’espace pour apporter ou enlever de petites quantités d’énergie à ces particules; ainsi elles passent sans cesse (des milliards de fois par seconde) d’un état quantique à un autre: chaque fois qu’elles absorbent un photon elles passent à un état d’énergie supérieure, chaque fois qu’elles émettent un photon elles passent à un état d’énergie inférieure. Ce brouillage est incomparablement plus puissant que par exemple celui qui résulte des nombreuses réflexions sur le bord de la roulette; le modèle simplifié de roulette discuté au chapitre I était un exemple choisi délibérément pour sa simplicité et restait dans les limites du calculable. Il n’est pas question d’en faire autant pour un gaz formé de 10^{24} particules (environ le nombre d’Avogadro), c’est-à-dire appliquer la mécanique quantique *exacte* à un tel système. Mais il est remarquable que ce brouillage produise l’équiprobabilité des modes d’occupation et non par exemple celui des distributions de particules discernables. Ceci est une loi fondamentale de la Physique et ne peut se déduire de considérations a priori sur les invariances spatio-temporelles.

Attention! Ce sont les modes d’occupations pour des états *d’énergie égale* qui sont équiprobables. Si on considère deux états d’énergie différente, celui dont l’énergie est plus basse a plus de chances d’être occupé. On peut comprendre cela en imaginant qu’on remue un pierrier sur une pente; bien que les pierres se mettent en mouvement de manière aléatoire et imprévisible, elles ont plus de chances de descendre que de monter: pour monter, il faut qu’une pierre ait par exemple heurté en descendant une autre pierre plus lente, et rebondi sur elle, de sorte que la quantité de mouvement totale soit conservée; pour que la pierre monte, il faut que l’autre pierre descende plus vite. Il en va de même pour les particules: l’agitation thermique ne fait que répartir l’énergie; l’énergie totale se conserve, de sorte que pour qu’une particule “monte” dans un état de plus grande énergie, il faut qu’en compensation une ou plusieurs autres “descendent”. On conçoit donc qu’en moyenne, il est plus difficile pour les particules de monter que de descendre, et on s’attend à ce que les nombres d’occupation des états de grande énergie soient en moyenne plus petits que les nombres d’occupation des états de faible énergie.

S'il n'y avait aucune agitation thermique, les particules seraient toutes dans l'état dit fondamental, celui dont l'énergie est la plus basse (c'est ce qui se produirait si la température devenait exactement égale à 0 degré Kelvin). C'est donc uniquement l'agitation thermique, c'est-à-dire l'échange incessant d'énergie entre les particules, qui permet à certaines de monter (au détriment des autres).

Afin de dénombrer les différents modes d'occupation entre tous les états quantiques, quelle que soit leur énergie, on découpe les valeurs possibles de l'énergie des états en petits intervalles de largeur δ ; ainsi ε_0 sera l'énergie la plus basse; on considérera les valeurs discrètes $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + i\delta$. Si δ est petit, les états dont l'énergie est comprise entre ε_i et ε_{i+1} ont pratiquement la même énergie; soit m_i leur nombre. Il est bien clair que les nombres m_i sont à peu près proportionnels à δ : si par exemple δ est doublé, il y aura deux fois moins d'intervalles d'énergie, mais les nombres m_i seront aussi deux fois plus grands. Puisque par construction les états d'un même intervalle ont à peu près la même énergie, les modes d'occupation des m_i états de l'intervalle seront tous à peu près équiprobables. On serait tenté de dire que plus δ est petit, plus cette équiprobabilité est exacte; mais cela n'a guère de sens car le principe de l'équiprobabilité des modes d'occupations est par nature approximatif, et si δ est si petit que m_i devient égal à 0, 1, ou 2, le principe devient même carrément faux; en fait il est essentiel que δ ne soit ni trop grand, ni trop petit, et m_i doit être un grand nombre, plutôt de l'ordre du nombre d'Avogadro que de l'ordre de cent ou mille.

Pour les m_i états quantiques d'énergie comprise entre ε_i et ε_{i+1} , il y aura donc pour n_i particules $(n_i + m_i - 1)!/n_i!(m_i - 1)!$ modes d'occupation: cela veut dire que si n_i particules sont distribuées entre les m_i états d'énergie comprise entre ε_i et ε_{i+1} , alors elles peuvent se répartir selon $(n_i + m_i - 1)!/n_i!(m_i - 1)!$ modes d'occupation différents. A priori on ne peut pas connaître les valeurs des n_i , mais par contre celles des m_i sont déterminées par les caractéristiques macroscopiques du système. Ce sont généralement les équations de la mécanique *classique* qui permettent de les déterminer. En effet, les m_i font partie des propriétés globales du système, qui constituent en quelque sorte l'environnement de la population de particules. Par exemple, si on sait que les particules sont des photons de rayonnement à l'intérieur d'une cavité, les états qu'ils peuvent occuper sont caractérisés par les fréquences propres de la cavité: pour chacune de ces fréquences propres, il y aura deux états quantiques possibles (différant par la polarisation) pour le photon. Calculer l'évolution du système complexe qu'est la population de photons par la mécanique quantique exacte est d'une complexité inouïe, mais calculer les fréquences propres de la cavité est

assez facile car la forme géométrique de la cavité ne subit pas le brouillage thermique; on effectuera donc des calculs classiques détaillés pour la cavité, mais on appliquera les lois du hasard à la population de photons. Cette façon d’aborder les systèmes formés d’un très grand nombre de particules ou de molécules constitue la *physique statistique*. Afin d’en donner une idée plus précise, le mieux est de traiter en détail un exemple concret, qui est aussi une application directe de ce que nous venons de voir concernant la statistique de Bose-Einstein : la loi de Planck.

II. 6. Une introduction à la physique statistique : la loi de Planck et le rayonnement du corps noir.

Le problème du *corps noir* est un des grands problèmes historiques de la Physique, car il est à l’origine de la Mécanique quantique (Max Planck, 1900). Concrètement, un corps noir est par exemple une cavité à l’intérieur d’un corps opaque, qui est chaud à l’intérieur mais thermiquement isolé à l’extérieur : dans la cavité il y a un rayonnement dû à l’émission thermique par le corps; plus le corps est chaud, plus nombreux sont les photons de haute fréquence (le corps peut avoir été chauffé “au rouge”, ou “à blanc”). Planck a d’abord trouvé la loi qui porte son nom en interpolant entre la loi de Rayleigh-Jeans (qui était correcte pour les faibles fréquences) et la loi de Wien (correcte pour les hautes fréquences), et non par le raisonnement probabiliste que nous présentons ici, puisque les photons et la statistique de Bose-Einstein n’étaient évidemment pas encore connus. Voir à ce sujet **XII.5**. Planck a cherché ensuite une explication statistique, mais c’est Einstein qui, en 1905, a eu l’idée de considérer des *quanta de lumière* pour expliquer la loi de Planck (*Annalen der Physik*, vol **17**, 1905, pages 132 – 148). Toutefois, dans cette publication de 1905, rien n’est dit sur l’aspect probabiliste. C’est Satyandranath Bose qui a proposé un fondement statistique (*Zeitschrift für Physik*, vol **26**, 1924, pages 178 – 181) :

Supposons que le rayonnement soit enfermé dans un volume V et que son énergie totale soit E . Il existe différentes sortes de quanta en nombre N_s et d’énergie $h\nu_s$, où s va de $s = 0$ à $s = \infty$ (...). Si nous pouvions exprimer la probabilité de chacune des distributions caractérisées par un nombre N_s arbitraire, alors la solution sera obtenue en prenant le critère de rendre cette probabilité maximale.

Cette probabilité est alors cherchée par le raisonnement suivant :

Soit N_s le nombre de quanta appartenant au domaine de fréquences $d\nu_s$. De combien de manières peut-on les distribuer entre les cellules appartenant à $d\nu_s$? Soit $p_{0,s}$ le nombre de cellules vides, $p_{1,s}$ le nombre de celles contenant un quantum, $p_{2,s}$ le nombre de celles en contenant deux, etc. Le nombre de distributions possibles est alors

$$\frac{A_s}{p_{0,s}! p_{1,s}! \dots}$$

où $A_s = (8\pi\nu^2/c^3) d\nu_s$, et où $N_s = 0 \cdot p_{0,s} + 1 \cdot p_{1,s} + 2 \cdot p_{2,s} + \dots$ est le nombre de quanta appartenant à la cellule $d\nu_s$.

On voit donc que le raisonnement suivi par Bose est celui d'une distribution de boules entre des cellules, mais dans son approche les nombres $p_{j,s}$ ne sont pas les nombres d'occupation, qui sont les N_s .

En 1900, quoique ne possédant pas le concept quantique de “mode d'occupation”, Planck a postulé que pour chaque fréquence le rayonnement se distribuait par unités discrètes entre des “résonateurs” hypothétiques, et a suivi, pour calculer l'entropie de ces résonateurs, un raisonnement finalement assez proche de celui que nous présentons ici. On pourra consulter l'article original *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*. Annalen der Physik, vol 4, 1901, pages 553 – 563). Pour une traduction française, voir la bibliographie.

Si au lieu de considérer uniquement des états de même énergie, ou d'énergie voisine, on considère l'ensemble de *tous* les états quelle que soit leur énergie, le nombre total de modes d'occupations sera bien sûr le produit

$$N = \prod_i \frac{(n_i + m_i - 1)!}{n_i! (m_i - 1)!} \quad (II.11)$$

Comme les nombres m_i et n_i sont très grands, on ne peut guère tirer de conclusions de ces grosses factorielles, et c'est pourquoi nous allons, comme pour les autres formules de dénombrement, trouver une expression approchée. Le procédé pour cela est toujours le même : d'abord trouver le maximum, et autour du maximum les factorielles peuvent être approchées par une fonction de la forme $\exp(-x^2)$.

Les m_i étant déterminés, considérons une perturbation $n_i + j_i$ des nombres n_i . Le nombre N sera alors changé en

$$N' = \prod_i \frac{(n_i + j_i + m_i - 1)!}{(n_i + j_i)! (m_i - 1)!}$$

Pour comparer N' à N on examinera N'/N . Or pour $j_i > 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{(n_i + j_i + m_i - 1)!}{(n_i + j_i)!} \bigg/ \frac{(n_i + m_i - 1)!}{n_i!} = \\ &= \frac{(n_i + m_i)(n_i + m_i + 1) \cdots (n_i + m_i + j_i - 1)}{(n_i + 1)(n_i + 2) \cdots (n_i + j_i)} \\ &= \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n_i + m_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i + m_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i - 1}{n_i + m_i}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \left(1 + \frac{2}{n_i}\right) \cdots \left(1 + \frac{j_i}{n_i}\right)} \end{aligned}$$

Dénombrement

$$\begin{aligned} &\simeq \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[\frac{j_i^2}{2(n_i + m_i)} - \frac{j_i^2}{2n_i} \right] \\ &= \left[\frac{n_i + m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[-\frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)} \right] \end{aligned}$$

Pour $j_i < 0$, quoique le calcul soit légèrement différent, on obtient la même expression analytique pour l'approximation. En regroupant tout dans le produit :

$$N' = N \prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i} \exp \left[-\sum_i \frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)} \right]$$

Comme nous avons vu au paragraphe précédent pour les coefficients multinômiaux, on peut alors dire que la condition pour que N soit maximum est que le facteur

$$\prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i} \right]^{j_i}$$

soit stationnaire lorsque les j_i s'écartent de 0. Il est clair que ce facteur *ne peut pas* rester stationnaire si les j_i sont tous indépendants les uns des autres (il faudrait pour cela que les m_i soient tous nuls). Dans le cas des coefficients multinômiaux, pour obtenir (II.7.), nous avons utilisé le fait que la somme des j_i était nulle. Cette condition exprime que le nombre total de particules ne varie pas. Mais une autre condition est possible : que l'énergie totale ne varie pas ; ou même les deux à la fois. Le maximum ne sera pas le même selon la contrainte qui lie les j_i entre eux, et par conséquent on n'obtient pas la même statistique. Par exemple s'il s'agit d'un gaz de photons (rayonnement de corps noir) l'énergie totale du rayonnement se conserve (c'est justement pour cela qu'il est dit "noir"), mais pas le nombre de photons, car pour maintenir l'équilibre thermique avec le corps noir il faut constamment que celui-ci absorbe ou émette des photons. Si par contre il ne s'agit pas de rayonnement, mais d'hélium liquide, les particules de Bose considérées sont alors des noyaux d'*He 4*, dont le nombre total doit se conserver. Ici c'est le cas du rayonnement qui nous intéresse, c'est-à-dire le gaz de photons, où c'est l'énergie totale et non le nombre de particules qui se conserve. Alors la contrainte sur les j_i est $\sum_i \varepsilon_i j_i = 0$; on peut donc exprimer l'un quelconque des j_i en fonction des autres : par exemple

$$j_a = -\frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{i \neq a} \varepsilon_i j_i$$

En remplaçant j_a par cette expression dans le facteur qui doit rester

stationnaire, on obtient

$$\begin{aligned}
 \prod_i \left[1 + \frac{m_i}{n_i}\right]^{j_i} &= \left[1 + \frac{m_a}{n_a}\right]^{j_a} \cdot \prod_{i \neq a} \left[1 + \frac{m_i}{n_i}\right]^{j_i} \\
 &= \left[1 + \frac{m_a}{n_a}\right]^{-\frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{i \neq a} j_i \varepsilon_i} \cdot \prod_{i \neq a} \left[1 + \frac{m_i}{n_i}\right]^{j_i} \\
 &= \prod_{i \neq a} \left[\frac{1 + \frac{m_i}{n_i}}{\left(1 + \frac{m_a}{n_a}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}}} \right]^{j_i}
 \end{aligned}$$

Cette fois les j_i (pour $i \neq a$) sont indépendants, donc la condition pour que ce produit soit stationnaire est que chacun des facteurs soit égal à 1, soit

$$1 + \frac{m_i}{n_i} = \left(1 + \frac{m_a}{n_a}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour i et a arbitraires, on peut donc dire que

$$K = \left(1 + \frac{m_i}{n_i}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_i}} \quad (II.12.)$$

est indépendant de i ; c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que

$$1 + \frac{m_i}{n_i} = K^{\varepsilon_i}$$

et par conséquent

$$n_i = \frac{m_i}{K^{\varepsilon_i} - 1} \quad (II.13.)$$

Pour les photons, les états quantiques qu'ils peuvent occuper sont caractérisés par la fréquence ν ; l'énergie d'un photon de fréquence ν_i est $\varepsilon_i = h\nu_i$, h étant la constante de Planck. Le nombre m_i est alors le nombre de fréquences propres de rayonnement (dans la cavité) comprises entre ν_i et $\nu_{i+1} = \nu_i + \delta/h$ (en fait le double car pour chaque fréquence propre il y a deux états de polarisation). La condition de *maximum* pour le nombre total N de modes d'occupation est donc que les n_i soient tous égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$.

Autour de leurs valeurs optimales correspondant au maximum, les n_i peuvent varier : cela aura pour effet de diminuer la valeur de N ; la diminution de N par rapport à sa valeur maximum $N_{\max}$ est alors donnée par le facteur gaussien

$$N = N_{\max} \exp \left[- \sum_i \frac{m_i j_i^2}{2n_i(n_i + m_i)} \right]$$

Ce facteur gaussien devient infinitésimal lorsque l'exposant dépasse environ 10 (en valeur absolue); cela se produit lorsque les j_i sont en moyenne supérieurs à plusieurs fois la quantité $\sqrt{n_i(1 + (n_i/m_i))}$. En principe les nombres m_i et n_i sont tous les deux grands, mais du même ordre (de l'ordre du nombre d'Avogadro, $\sim 10^{24}$); on peut donc considérer que N reste proche de sa valeur maximum tant que les fluctuations j_i des n_i sont de l'ordre de $\sqrt{n_i} \sim 10^{12}$; au delà, N devient très vite infiniment plus petit que sa valeur maximum. Les modes d'occupation pour lesquels les nombres d'occupation n_i diffèrent de la valeur optimale $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$ de plus que quatre ou cinq fois leur racine carrée sont donc extrêmement peu nombreux.

Or, le hasard pur “choisit” parmi les modes d'occupation, qui sont tous équiprobables. Nous venons de voir que pour la quasi totalité de ces modes d'occupation, les nombres n_i sont, à $j_i \sim \sqrt{n_i}$ près, égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$, tandis que les n_i ne s'écartent de cette valeur optimale que pour un nombre incomparablement plus petit de modes d'occupation. Par conséquent le choix du hasard pur sera presque sûrement un mode d'occupation pour lequel les n_i seront à peu près égaux à $m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$. La cause de cela n'est pas que le hasard “préfère” les modes d'occupations pour lesquels $n_i \simeq m_i/(K^{\varepsilon_i} - 1)$, mais tout simplement que ces modes d'occupation sont de très loin les plus nombreux.

Même s'il arrivait que *par hasard* un mode d'occupation rare se produise, il ne durerait qu'un temps infinitésimal (10^{-12} seconde ou même bien moins), car l'agitation thermique a pour effet de déloger sans cesse les particules de l'état qu'elles occupent, de sorte que les modes d'occupation changent sans cesse; il est donc logique que ceux qui constituent l'immense majorité soient presque toujours en place.

Le mystérieux paramètre K qui apparaît dans II.12 et II.13 doit être lié à la température absolue T du corps noir. En effet, si la température est grande, les hautes fréquences doivent être occupées par davantage de photons, et si elle est nulle, seule la fréquence 0 doit être occupée. Autrement dit, pour $\varepsilon_i > 0$ le dénominateur $K^{\varepsilon_i} - 1$ doit devenir infini lorsque la température est nulle afin que n_i soit nul, donc K doit être infini pour $T = 0$. Inversement, le dénominateur doit être de plus en plus petit pour les grandes valeurs de ε_i , afin que le n_i correspondant soit grand, donc K doit tendre vers 1 quand la température T tend vers l'infini. Dans l'article cité, Planck a obtenu une expression précise de ce paramètre K en comparant II.13. à la loi de Wien, qui était connue et vérifiée par l'expérience pour le rayonnement ultra-violet. Celle-ci comportait un facteur $\exp(-\alpha\nu_i/T)$, dans lequel ν est la fréquence du rayonnement (pour nous, les photons), T la température absolue en Kelvin, et α une constante empirique.

Cette loi de Wien n'était valable que pour les grandes fréquences. Comparée à celle de Planck, elle correspond au cas où on peut négliger le terme -1 dans le dénominateur de II.13. Planck soupçonnait que la loi de Wien devait être une version asymptotique de la véritable loi qu'il était en train de chercher ; les raisonnements probabilistes de la Physique statistique laissent les paramètres tels que les nombres m_i indéterminés, car on ne peut pas mesurer directement leur valeur. Il fallait donc rattacher la loi obtenue II.13 à des grandeurs mesurables expérimentalement, or justement la loi de Wien, quoique obtenue au départ par des arguments théoriques, était une loi empirique : étant de forme exponentielle, il suffisait de reporter sur une échelle logarithmique les valeurs mesurées de l'intensité du rayonnement dans chaque intervalle de fréquence, qui se répartissaient alors le long d'une droite. Partant donc de cette idée que le facteur $1/(K^\varepsilon - 1)$ dans II.13 doit être asymptotiquement équivalent au facteur $\exp(-\alpha\nu/T)$ de la loi de Wien, on obtient

$$K^{-\varepsilon_i} = e^{-\frac{\alpha\nu}{T}}$$

Pour que l'identification ait un sens physique, il faut que l'argument dans l'exponentielle soit sans dimension ; or ε_i ayant la dimension d'une énergie, Planck a choisi de prendre $K = \exp(1/kT)$ et $\varepsilon_i = k\alpha\nu_i$ où k est la constante de Boltzmann ($\simeq 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/deg). C'est la constante $h = k\alpha \simeq 6.55 \cdot 10^{-27}$ erg · sec qui a pris le nom de *constante de Planck*, et la relation $\varepsilon_i = h\nu_i$, déduite par identification à la loi empirique de Wien, est à l'origine de la Mécanique quantique.

En conclusion, pour un rayonnement *de corps noir*, c'est-à-dire un rayonnement emprisonné dans une cavité et en équilibre thermique avec la matière formant les parois de la cavité, le nombre n_i de photons dont la fréquence est comprise entre ν_i et ν_{i+1} est égal à

$$\frac{m_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1}$$

où T est la température qui règne dans la cavité et h la constante de Planck. L'étude purement électromagnétique des fréquences propres de la cavité montre que le nombre d'états m_i correspondant à un intervalle de fréquences $[\nu_i, \nu_{i+1}[$ de largeur $\eta = \delta/h$ est proportionnel à $\nu_i^2 \eta$ ⁽¹⁾ ; de plus, un photon de fréquence ν porte une énergie $h\nu$; on aboutit ainsi à la *loi de Planck* : l'intensité (l'énergie) de la part de rayonnement dont la fréquence

⁽¹⁾ voir *Quantique* par Levy-Leblond et Balibar, page 453.

Dénombrement

est comprise entre ν_i et ν_{i+1} est proportionnelle à

$$\frac{h\nu_i^3 \eta}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} \quad (II.14.)$$

Il faut bien comprendre que cette loi est due *uniquement* à l'action du hasard qui choisit, des milliards de milliards de fois par seconde, des modes d'occupation parmi l'ensemble de tous les modes d'occupation possibles, sans en favoriser aucun. La loi de Planck est vérifiée, non parce que les photons lui “obéissent”, mais parce que les photons n’obéissent à rien.