UNIVERSITE RENE DESCARTES

U.F.R. de MATHEMATIQUES
et INFORMATIQUE

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Licence de Mathématiques

C. Graffigne

Table des matières

Chapitre 1

Endomorphismes et Matrices.

1.1 Rappels.

On considère un corps commutatif K et E et F deux espaces vectoriels sur K de dimensions finies p et n. On note $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F)$ les espaces des endomorphismes de E dans F, respectivement de E. On leur associe (deux bases ayant été choisies dans E et F) $\mathcal{M}_{np}(K)$ et $\mathcal{M}_n(K)$ les espaces de matrices de tailles (n,p), respectivement (n,n). Munis de la composition ou‘de la multiplication, $\mathcal{L}(F)$ et $\mathcal{M}_n(K)$ sont deux K-algèbres isomorphes.

Remarques :

- $\mathcal{M}_{np}(K)$ et $\mathcal{M}_n(K)$ sont de dimension $n \times p$, respectivement n^2.
- $\mathcal{M}_n(K)$ n'est ni intègre, ni commutatif.
- On utilisera uniquement dans la pratique $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On peut aussi définir le A-module des matrices à coefficients dans un anneau commutatif unifère.

1.1.1 Sous-espace de $\mathcal{M}_n(K)$

Groupe linéaire

On note $GL_n(K)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.

Matrices triangulaires

On note $T_n^+(K)$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures, et $T_n^-(K)$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures. Ces deux espaces sont de dimensions $n(n+1)/2$. Munis de la multiplication, ils forment deux K-algèbres.

◇ Soient A, B deux éléments de $T_n^-(K)$, $A = \sum_{i \geq j} a_{ij} E_{ij}$ et $B = \sum_{i \geq j} b_{ij} E_{ij}$ où $E_{ij} = (e_{kl})$, $e_{kl} = \delta_{ki} \times \delta_{lj}$. On obtient $A \times B = \sum_{i \geq j} \sum_{k \geq l} a_{ij} b_{kl} E_{ij} \times E_{kl}$ avec $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$, d'où $A \times B = \sum_i \sum_l \left(\sum_{l \leq j \leq i} a_{ij} b_{jl} \right) E_{il} = \sum_i \sum_{l \geq i} \left(\sum_{i \leq j \leq l} a_{ij} b_{jl} \right) E_{il}$ ◇

Remarque : Si on modifie l'ordre de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en $(e_n, \ldots, e_1)$, on transforme une matrice triangulaires supérieure en une matrice triangulaire inférieure.

Matrices symétriques ou antisymétriques

Définition 1.1.1 *Si $M = (m_{ij})$, on note ${}^tM = (m_{ji})$ la matrice transposée de M. (Si M est la matrice de l'endomorphisme u dans une base donnée, ${}^tM$ est la matrice de ${}^tu$ dans la base duale.)*

On définit alors $\mathcal{S}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) |\ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) |\ {}^tM = -M\}$.

Remarque : Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(K)$, $M = \frac{1}{2}(M+^t M)+\frac{1}{2}(M-^t M)$ et donc $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S}_n(K) \oplus \mathcal{A}_n(K)$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M.^tM =^t MM = I$.

Matrices hermitiennes

Définition 1.1.2 *Si $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M^* = (m_{ji})$ la matrice ${}^t\bar{M}$. La matrice M est dite hermitienne si $M^* = M$.*

Matrices orthogonales, unitaires

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $MM^* = M^*M$, elle est unitaire si $MM^* = M^*M = I$.

1.1.2 Changement de base

Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ deux bases de E, $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(f'_1, \ldots, f'_n)$ deux bases de F. On définit $P = Mat_e(e'_1, \ldots, e'_p)$ la matrice de passage de (e) à (e') et $Q = Mat_f(f'_1, \ldots, f'_n)$ la matrice de passage de (f) à (f'). Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = Mat_{e,f}(u)$, on obtient $A = Mat_{e',f'}(u) = Q^{-1}AP$. Si $E = F$, on a $B = P^{-1}AP$.

Remarque : Si $q \in K[X]$, $q(B) = P^{-1}q(A)P$.

Définition 1.1.3 *Deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{np}(K)$ sont équivalentes s'il existe deux matrices $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $B = Q^{-1}AP$. Deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$ sont semblables s'il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 1.1.1 *Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$, $det(M)$, $rg(M)$ et $tr(M)$ sont invariants par changement de base. (Ils sont en fait associés à l'endomorphisme.)*

Théorème 1.1.1 *Deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$ sont semblables si et seulement si elles ont mm̂e rang.*

◇ En fait toute matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

◇

1.2 Valeurs propres d'un endomorphisme.

Définition 1.2.1 *Soit u un endomorphisme du K-espace vectoriel E. On dit qu'un élèment λ de K est une valeur propre de u s'il existe $\boldsymbol{x} \in E$, $\boldsymbol{x} \neq 0_E$, tel que $u(\boldsymbol{x}) = \lambda.\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}$ est appelé un vecteur propre de u correspondant à λ.*

Pour toute valeur propre λ, le sous-espace vectoriel E_λ formé des $\boldsymbol{x} \in E$ tels que $u(\boldsymbol{x}) = \lambda.\boldsymbol{x}$ est appelé le sous-espace propre E_λ de E relatif à la valeur propre λ.

Remarques :

- Si $\boldsymbol{x} \in E_\lambda$ et $\boldsymbol{x} \neq 0_E$, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre.
- Pour toute valeur propre λ, $E_\lambda \neq \{0_E\}$.

Théorème 1.2.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme $u-\lambda.I$ ne soit pas injectif est que le rang de la matrice $u - \lambda.I$ soit strictement inférieur à n, donc que le déterminant de la matrice $U - \lambda.I_n$ soit nul.*

Remarque : L'existence des valeurs propres (et celle des sous-espaces propres) dépend donc du corps K. Par exemple, considèrons la matrice U élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est la matrice de la rotation de centre O et d'angle t dans le plan orthonormé ;

$$U = \begin{pmatrix} cos\,t & -sin\,t \\ sin\,t & cos\,t \end{pmatrix}$$

il est clair qu'elle n'a pas de valeurs propres. Par contre, si l'on considère la même <u>matrice</u> comme élèment de $M_2(\mathbb{C})$, on trouve les deux valeurs propres $\lambda_1 = e^{it}$ et $\lambda_2 = e^{-it}$.

Définition 1.2.2 *Soit u un endomorphisme du K-espace vectoriel de dimension finie E. Une base ayant été choisie, on appelle polynôme caractéristique de u (ou de U) le polynôme ; $\chi_u(X) = det(X.I - U)$*

Remarques :

- $det(X.I - U) = (-1)^n.det(U - X.I)$.
- Le degré du polynôme caractéristique est n, dimension du K-espace vectoriel E.
- $det(X.I - U) = X^n - tr(U).X^{n-1} + \ldots + (-1)^n.det(U)$.
- Si $\lambda \in K$ est une racine de $det(X.I - U)$ alors λ est une valeur propre de U et il existe donc un vecteur propre pour λ.
- Si $det(X.I - U)$ est scindé dans K, et soient $(\lambda_i, i = 1, \ldots, n)$ ses racines distinctes ou non, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(U)$ et $\prod_{i=1}^n = det(U)$.
- Le degré du polynôme caractéristique est n, dimension du K-espace vectoriel E.

Proposition 1.2.1 *Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension plus grande que 1 possède au moins un vecteur propre.*

Définition 1.2.3 *On considère une matrice $U \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que toutes ses valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ appartiennent à K. On appelle spectre de la matrice U et l'on note $Spec_K(U)$ l'ensemble des λ_i, $(1 \leq i \leq r \leq n)$. On définit aussi le rayon spectral $\rho(M)$ de la matrice M comme le plus grand des modules des valeurs propres.*

Remarque : Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les valeurs propres de u soient dans K est que le polynôme caractéristique de u soient scindé dans K, ce qui sera en particulier le cas lorsque K est algèbriquement clos, donc pour ce qui nous intéresse, lorsque ce corps sera $\mathbb{C}$.

1.3 Trigonalisation de la matrice d'un endomorphisme.

Théorème 1.3.1 *Soit u un endomorphisme du K-espace vectoriel E, de dimension finie n. Une base ayant été choisie, soit $U \in M_n(K)$ la matrice de u dans cette base. Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice U soit semblable à une matrice triangulaire supérieure T, est que U ait toutes ses valeurs propres dans K.*

◇ La condition est nécessaire ; soit u un endomorphisme de E et supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieure ;

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n-2} & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \cdots & x_{2,n-2} & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & x_{3,n-2} & x_{3,n-1} & x_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} & x_{n-1,,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Il est clair que les valeurs propres de cette matrice sont les $t_{i,i}$ $t \leq i \leq n$, donc ces valeurs propres sont élèments de K.

La condition est suffisante ; soit $(u_{i,j})$ la matrice de u. Montrons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire et pour cela, raisonnons par récurrence sur la dimension n ; si la dimension de E est $n = 1$, la matrice est triangulaire. Supposons que la propriété soit vraie pour toutes les matrices d'ordre $n-1$. La matrice U appartenant à $M_n(K)$ a au moins un vecteur propre e_1 associé à la valeur propre λ_1 ; soit H un hyperplan supplémentaire de la droite $K.e_1$.

Soit $(e_2, \cdots, e_n)$ une base de H; $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme u s'écrit ;

$$U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n-2} & y_{1,n-1} & y_{1,n} \\ 0 & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n-2} & y_{2,n-1} & y_{2,n} \\ 0 & y_{3,2} & \cdots & y_{3,n-2} & y_{3,n-1} & y_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-2} & y_{n-1,n-1} & y_{n-1,,n} \\ 0 & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{n,n-1} & y_{n,n} \end{pmatrix}$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la matrice ;

$$U_2 = \begin{pmatrix} y_{2,2} & \cdots & y_{2,n-2} & y_{2,n-1} & y_{2,n} \\ y_{3,2} & \cdots & y_{3,n-2} & y_{3,n-1} & y_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-2} & y_{n-1,n-1} & y_{n-1,,n} \\ y_{n,2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{n,n-1} & y_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les polynômes caractéristiques des matrices T et U sont les mêmes et l'on a ;

$$\chi_T(X) = \chi_U(X) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i) = (X - \lambda_1).\prod_{i=2}^{n}(X - \lambda_i)$$

Par conséquent, le polynôme $\chi(U_2) = \prod_{i=2}^{n}(X_i - \lambda_i)$ est scindé et cette matrice d'ordre $n-1$, est donc trigonalisable, ce qui achève la démonstration du théorème. $\diamond$

Corolaire 1.3.1 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E et*

$$\chi_U(X) = det(XI - U) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

la décomposition du polynôme caractéristique dans une clôture algèbrique de K. Soit $q \in K[X]$ un polynôme quelconque. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $q(u)$ est;

$$\chi_{q(u)}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - q(\lambda_i)).$$

$\diamond$ On peut, pour faire la démonstration, supposer que K est algèbriquement clos. On choisit une base par rapport à laquelle la matrice U est triangulaire. La matrice $q(U)$ est triangulaire et l'élèment de position (i,j) de $q(U)$ est $q(u_{i,j})$. $\diamond$

1.4 Algèbres normées.

Définition 1.4.1 *A est un anneau commutatif intégre (donc, par définitioçn unitaire). L'élèment unitaire (pour la multiplication) sera noté 1. On appelle algèbre sur A (ou A-algèbre) un ensemble E muni d'une structure définie par les données suivantes:*

- *une structure de A-module sur E*

•• *une application A-bilinéaire de $E \times E$ dans E.*

Le plus souvent dans ce qui suit, la structure de A-module sera une structure de K-espace vectoriel, où K désigne le corps R des rééls ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On dira alors que E est une K-algèbre.

Si $f : E \times E \rightarrow E$ est l'application bilinéaire, on a donc: $f(x+x', y) = f(x,y) + f(x', y)$, $f(x, y+y') = f(x,y) + f(x,y')$ et $f(ax,y) = f(x,ay) = af(x,y)$ pour tout $a \in K$.

Le plus souvent, on écrit $f(x,y) = x.y$ ou xy et l'application bilinéaire f, lorsque l'on étudie les algèbres sans en préciser une, s'appelle multiplication. Lorsque cette multiplication est associative, on dit que l'algèbre est associative; lorsqu'elle est commutative, l'algèbre est dite commutative. Lorsque la multiplication admet un élèment neutre, l'algèbre est dite unifère.

Les algèbres que nous considérerons sont toutes associatives, mais ne sont pas, en général, commutatives.

Exemple 1.4.1

1. *Soit E un K-espaces vectoriel et soit End(E) le K-espace vectoriel des applications linéaires de E dans lui-même. L'application $(u,v) \rightarrow vou$ est une application bilinéaire, associative, en général non commutative, admettant un élèment unité (l'application identique de E sur lui-même, généralement notée id_E ou 1_E ou, plus simplement 1). Le K-espace vectoriel End(E) est donc muni d'une structure d'algèbre associative, unifère. Cette algèbre n'est pas commutative.*

2. *Soit $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans K. C'est une algèbre associative, unifère (l'unité sera noté I_n). Cette algèbre n'est pas commutative.*

3. *L'espace vectoriel $\mathcal{D}^0(R)$ des applications continues à support compact est muni d'une structure d'algèbre par le produit habituel $(f,g) \rightarrow f.g$ et d'une autre structure d'algèbre par le produit de convolution $(f,g) \rightarrow f*g = \int_R f(x-t).g(t)dt$.*

   Ces deux algèbres sont associatives, commutatives. Aucune des deux n'est unifère.

Définition 1.4.2 - *Soit E une K-algèbre. Une norme $\|*\|$ définie sur le K-espace vectoriel E est dite compatible avec la structure d'algèbre si elle vérifie la condition suivante: l'application f de $E \times E$ dans $(x,y) \rightarrow x.y$ est continue. Elle est une norme d'algèbre si pour tout couple (x,y) de E^2, $\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$. La K-algèbre normée E est appelée "algèbre de Banach" si le K-espace vectoriel normé E est complet.*

Proposition 1.4.1 *Soient $E_1 \cdots E_m$, F, $(m+1)$ K-espaces vectoriels normés et soit f une application multilinéaire du produit E des $E_i, 1 \leq i \leq m$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en tout point de l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_m$,*

2. *f est bornée sur la boule unité de E,*

3. *il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_i) \in E$, on ait $\|f(x_1 \cdots x_m)\| \leq k\|x_1\| \cdots \|x_m\|$.*

Remarque : Dans une algèbre normée, la relation: $\|x.y\| \leq \|x\|.\|\mathrm{y}\|$ entraine évidemment la continuité de l'application bilinéaire: $(x,y) \rightarrow x.y$.

Cette condition n'est pas nécessaire pour que cette application bilinéaire soit continue. Mais si cette application est continue, on peut remplacer la norme par une norme équivalente avec laquelle la relation $\|x.y\| \leq \|x\|.\|\mathrm{y}\|$ sera vérifiée.

En effet, si l'application $(x,y) \rightarrow x.y$ est continue sur E^2, il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout x et y dans E, on ait: $\|x.y\| \leq k\|x\|.\|y\|$. Posons $n(x) = sup(k,1).\|x\|$; l'application n est évidemment une norme sur E équivalente à $\|*\|$ et, d'autre part, on a: $n(x.y) = sup(k,1).\|x.y\| \leq sup(k,1)^2\|x\|.\|y\| = n(x).n(y)$

Donc, la nouvelle norme est une norme d'algèbre, on dit que l'algèbre est normée.

Exemple 1.4.2 *L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ munie de la norme:*

$$\|x_{i,j}\| = \sum_{(i,j) \leq n} |x_{i,j}|$$

est une algèbre de Banach. (Ce qui signifie que cette norme est une norme d'algèbre et que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de cette norme est complet.)

Exemple 1.4.3 *Le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *muni de la norme:*

$$||M|| = \sup_{(i,j)} |m_{i,j}|$$

est un espace de Banach. Ce n'est pas une algèbre normée, parce que cette norme n'est pas une norme d'algèbre.

Par contre, si l'on remplace cette norme par la norme (nécessairement équivalente puisqu'on est en dimension finie):

$$||M|| = n.\sup_{(i,j)} |m_{i,j}|$$

on obtient une algèbre de Banach.

Exemple 1.4.4 *Soit* E *un espace vectoriel normé et soit* $End(E) = L(E,E)$ *muni de la multiplication* $(u,v) = vou$*. Alors* $End(E)$ *est une algèbre associative, unifère, non commutative et cette algèbre munie de la norme*

$$|||x||| = \sup_{||x||=1} ||u(x)||$$

est une algèbre normée.

Théorème 1.4.1 *Si* E *est un espace de Banach,* $End(E)$ *est une algèbre de Banach.*

Exemple 1.4.5 *L'espace vectoriel* $\mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ *des applications continues à support compact muni d'une structure d'algèbre par le produit de convolution*

$$(f,g) \to f * g = \int_R f(x-t).g(t)dt$$

muni de la norme:

$$||f|| = \int_R |f(t)|.dt$$

est une algèbre normée qui n'est pas complète.

On s'intéressera plus particulièrement à l'exemple suivant.

Exemple 1.4.6 *Soit* $||.||$ *une norme sur* $\mathbb{C}^n$*, le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *muni de la norme:*

$$|||M||| = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, v\neq 0} \frac{||Mv||}{||v||} = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, ||v||=1} ||Mv||$$

est une algèbre normée. On peut construire une norme similaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Les normes les plus courantes sur* $\mathbb{C}^n$ *sont:*

$$||v||_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{1/p}$$

$$||v||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$$

Théorème 1.4.2 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$*, où* K *est algébriquement clos, alors:*

$$|||M|||_1 = \sup_{v\in E, v\neq 0} \frac{||Av||_1}{||v||_1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|$$

$$|||M|||_\infty = \sup_{v\in E, v\neq 0} \frac{||Av||_\infty}{||v||_\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$$

◇ Pour tout vecteur v,

$$\|Mv\|_1 = \sum_i \left|\sum_j m_{ij} v_j\right| \leq \sum_j \left(|v_j| \sum_i |m_{ij}|\right) \leq \left(\max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|\right) \|v\|_1$$

L'égalité étant atteinte pour le vecteur $v = (v_j)$ tel que pour tout $j \neq j_0$, $v_j = 0$ et $v_{j_0} = 1$ où j_0 est un indice tel que $\sum_{i=1}^n |m_{ij_0}| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|$.

On a de même

$$\|Mv\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \left|\sum_{j=1}^n m_{ij} v_j\right| \leq \left(\max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|\right) \|v\|_\infty$$

avec cette fois l'égalité pour v tel que $v_j = \bar{m}_{i_0 j}/|m_{i_0 j}|$ si $m_{i_0 j} \neq 0$ et $v_j = 1$ sinon, l'indice i_0 étant tel que $\sum_{j=1}^n |m_{i_0 j}| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$. ◇

Théorème 1.4.3 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors :*

$$|||M|||_2 = \sup_{v \in E, v \neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(M^*M)} = \sqrt{\rho(MM^*)} = |||M^*|||_2$$

Cette norme est invariante par transformation unitaire (si U est une matrice unitaire, $|||M|||_2 = |||UM|||_2 = |||MU|||_2 = |||U^*MU|||_2$). De plus, si M est normale, $|||M|||_2 = \rho(M)$.

◇ Admis pour le moment, ce résultat sera démontré plus tard. ◇

Théorème 1.4.4 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, où K est algébriquement clos, alors pour toute norme d'algèbre :*

$$|||M||| \geq \rho(M)$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$, il existe au moins une norme d'algèbre telle que

$$|||M||| \leq \rho(M) + \epsilon$$

◇ Pour toute valeur propre λ, il existe au moins un vecteur propre v que l'on peur choisir unitaire, on a alors $\|Mv\| = |\lambda|$ et donc $|||M||| \geq \lambda$.

La matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(K)$, soit U une matrice de changement de base telle que :

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1(n-1)} & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & t_{2(n-1)} & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & t_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$, considérons un réel $\delta > 0$ et la morme :

$$|||A|||_\delta = |||(UD_\delta)^{-1}.B.(UD_\delta)|||_\infty \text{ avec } D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^n \end{pmatrix}$$

on calcule :

$$(UD_\delta)^{-1}.M.(UD_\delta) = D_\delta^{-1}(U^{-1}.M.U)D_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \cdots & \delta^{n-2} t_{1(n-1)} & \delta^{n-1} t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \delta^{n-3} t_{2(n-1)} & \delta^{n-2} t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \delta t_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et donc si on choisit δ tel que pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, $\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} t_{ij}| \leq \epsilon$, on a bien $|||M|||_\delta \leq \rho(M) + \epsilon$ (d'après le théorème précédent).

◇

Théorème 1.4.5 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, alors:*

$$|||M|||_E = \left(\sum_{i,j} |m_{ij}|^2 \right)^{1/2} = tr(M^*M)^{1/2}$$

Cette norme est une norme d'algèbre invariante par transformation unitaire. De plus,

$$|||M|||_2 \leq |||M|||_E \leq \sqrt{n}|||M|||_2$$

◇ Le fait qu'il s'agit bien d'une norme d'algèbre provient directement de l'inégalité de Cauch-Schwartz. L'invariance par transformation unitaire se déduit de l'expression $tr(M^*M)^{1/2}$ et du fait que la trace est invariante par changement de base. Finallement $\rho(M^*M) \leq tr(M^*M) \leq n\rho(M^*M)$ d'après le théorème 1.4.3 et la définition de $\rho(M^*M)$. ◇

Théorème 1.4.6 *Soit* $|||.|||$ *une norme d'algèbre et* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $|||M||| < 1$*. Alors la matrice* $I + M$ *est inversible et* $|||(I+M)^{-1}||| \leq 1/(1 - |||B|||)$*.*

Si la matrice $I + M$ *est singulière, alors* $|||M||| \geq 1$*.*

◇ En effet, $(I + M)v = 0$ implique $\|v\| = \|Mv\|$ ce qui est impossible si $v \neq 0$ d'après $|||M||| < 1$. De plus $(I + M)^{-1} = I - M(I + M)^{-1}$ et donc $|||(I + M)^{-1}||| \leq 1 + |||M|||.|||(I + M)^{-1}|||$.

Supposons maintenant que $I + M$ est singulière ce qui revient à dire que (-1) est une valeur propre de M et donc que $|||M||| \geq \rho(M) \geq 1$. ◇

1.5 Séries entières dans une algèbre de Banach.

D'une façon générale, soit: $\sum_{n \geq 0} a_n.X^n$ une série entière. On obtient un résultat analogue à celui qui établit l'existence du rayon de convergence pour une série entière.

Définition 1.5.1 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n.X^n$*,* $a_n \in K$*, une série entière. On appelle rayon de convergence de cette série formelle, l'élèment (qui peut être 0 ou* $+\infty$*)*

$$R = \frac{1}{\underline{lim}sup\, |a_n|^{1/n}}.$$

Théorème 1.5.1 *Soit* E *une* K*-algèbre de Banach unifère et soit* $\sum_{n\geq 0} a_n.X^n$*,* $a_n \in K$*, une série formelle dont le rayon de convergence est* R*. Soit* x *un élèment de* E*. La série* $\sum_{n\geq 0} a_n.X^n$ *est convergente et normalement convergente dans la boule ouverte* $\|x\| < R$*.*

Elle est uniformément convergente dans toute boule fermée de rayon strictement inférieur à R*; sa somme est une fonction continue dans la boule ouverte de rayon* $R > 0$*.*

La démonstration est calquée sur celle valable pour les séries entières "habituelles": Soit r' un nombre tel que $r' < R$ et soit r un nombre tel que $r < r' < R$.

Pour n assez grand, on a $|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{r'}$ (définition de la limite supérieure) donc si $\|x\| \leq r$, on a:

$$\|a_n x^n\| \leq |a_n| r^n \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

La convergence de la série géomètrique (numérique) de raison $\frac{r}{r'}$ entraine la convergence normale de $\sum_{n\geq 0} a_n.X^n$ dans la boule de rayon r, donc la convergence dans la boule ouverte de rayon R.

La démonstration de la continuité en tout point x_0 appartenant au disque ouvert $(0, R)$ demande plus de précautions. On écrit classiquement:

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \left\| \sum_0^N (a_n(x_0 + h)^n - a_n x_0^n) \right\| + \left\| \sum_{n+1}^{+\infty} a_n(x_0 + h)^n \right\| + \left\| \sum_{n+1}^{+\infty} a_n(x_0)^n \right\|$$

Le point particulier est la majoration concernant la continuité du polynôme $\sum_0^N a_n x^n$ car on n'a pas: $(x_0 + h)^n = \sum_{p=0}^n \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} x_0^{n-p}.h^p$ (non nécessairement commutatif).

Mais la norme $|| * ||$ étant une norme d'algèbre, on a:

$$||(x_0 + h)^n - x_0^n|| \leq ||h|| \sum_{p=1}^{n} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} ||x_0||^{n-p}.||h||^{p-1}$$

ce qui permet de retrouver le raisonnement classique:

Z Il n'est pas exact (comme pour les séries entières habituelles), que la série soit divergente pour tout x tel que: $||x|| \geq R$, car on a seulement $||x^n|| \leq ||x||^n$, alors que, sur $\mathbb{C}$, on a: $||x^n|| = ||x||^n$.

Voici un contre-exemple : dans l'algèbre $End(\mathbb{R}^n)$ qui est une algèbre de Banach, on considère une série $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ dont le rayon de convergence R est fini et non nul. Soit u un endomorphisme nilpotent appartenant à la boule de convergence; quel que soit le réel λ, la série $\sum_0^{+\infty} a_n(\lambda.u)^n$ est convergente et on peut choisir λ (puisque $||\lambda.u|| = |\lambda|.||u||$) de manière que $\lambda.u$ soit extérieur à la boule de convergence.

1.6 La fonction exponentielle dans $End(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$.

Dans le cas d'une variable réelle, soit x une variable réelle, par définition :

$$e^x = \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La fonction $x \longrightarrow exp\, x$ est un isomorphisme analytique du groupe additif de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$. L'isomorphisme réciproque est $x \longrightarrow ln\, x$.

Dans le cas d'une variable complexe, si z est une variable complexe, on définit

$$e^z = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette application n'est plus bijective; c'est un homomorphisme du groupe additif de $\mathbb{C}$ sur le groupe multiplicatif C^*. Son noyau est le sous-groupe additif $(e^{2n\pi})_{n\in Z}$. Il n'existe pas de fonction réciproque au sens strict du terme; autrement dit, la "fonction" $z \longrightarrow ln\, z$ est une "fonction multiforme".

Par contre, on peut considérer la fonction analytique: $z \longrightarrow ln\,(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ définie dans le disque ouvert $||z|| < 1$. La fonction inverse de cette fonction est: $z \longrightarrow exp(z) - 1$.

On va chercher à étendre ce qui précède à l'algèbre de Banach $End(E)$, E étant un K-espace vectoriel de dimension finie n et K étant l'un des corps R ou $\mathbb{C}$. L'obstacle essentiel à une telle extension est la non commutativité de l'algèbre $End(E)$.

La dimension du K-espace vectoriel est n^2, donc elle est finie; toutes les normes sur $End(E)$ sont donc équivalentes, mais toutes ne sont pas des normes d'algèbre. Dans tout ce sui suit, les normes dont il sera question sont des normes d'algèbre. De ce fait, on aura: $||u^n|| \leq ||u||^n$.

Les résultats sont généralement énoncés pour des endomorphismes (donc en dimension quelconque).

Définition 1.6.1 *Soit E un K-espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente dans $End(E)$ et l'on désigne sa somme par exp.u ou e^u.*

Théorème 1.6.1 *Soient u et v deux endomorphismes qui commutent, on a: $e^{u+v} = e^u.e^v = e^v.e^u$.*

La démonstration est une conséquence immédiate de l'égalité suivante, valable lorsque les deux endomorphismes u et v commutent: pour tout entier $k \geq 0$:

$$(u+v)^k = \sum_{p=0}^{k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u^{k-p}.v^p$$

Z La condition de commutativité est essentielle : Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ On a $U.V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V.U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices U et V sont nilpotentes d'ordre 2 et l'on a :

$$e^U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part $U+V=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, avec des notations classiques :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.(U+V).P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } e^{U+V}=\begin{pmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{pmatrix}$$

Corolaire 1.6.1 *Soit k un entier positif. Quel que soit $u \in End_K(E)$, on a $\exp(k.u)=(\exp u)^k$.*

Corolaire 1.6.2 *Pour tout $p \in GL(E)$, on a: $p^{-1}.(\exp u).p=\exp(p^{-1}.u.p)$.*

◇ Par définition,

$$\exp(p^{-1}.u.p)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(p^{-1}.up)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(p^{-1}.u^n.p)}{n!}$$

et, par conséquent :

$$\left\|\exp(p^{-1}.u.p)-\sum_{n=0}^{+q}\frac{p^{-1}.u^n.p}{n!}\right\| \leq \|p^{-1}\|.\|p\|.\left\|\exp u-\sum_{0}^{q}\frac{u^n}{n!}\right\|$$

qui tend vers 0 lorsque q tend vers $+\infty$. ◇

Corolaire 1.6.3 *Quel que soit l'endomorphisme $u \in End_K(E)$, l'application $u \to \exp u$ est inversible. Autrement dit, $\exp u \in GL(E)$.*

On a: $\exp u.\exp(-u)=\exp(-u).\exp u=\exp(0)=1_E$.

Théorème 1.6.2 *Quelle que soit la matrice $U \in M_nC$, on a ${}^t(\exp U)=\exp({}^tU)$ et $\overline{\exp U}=\exp(\overline{U})$*

1.6.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Cas d'une matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad e^D=\begin{pmatrix} exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & exp(\lambda_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & exp(\lambda_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Cas d'une matrice trigonale.

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad e^D=\begin{pmatrix} exp(\lambda_1) & * & \cdots & * & * \\ 0 & exp(\lambda_2) & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & exp(\lambda_{n-1}) & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Corolaire 1.6.4 *Soit $U \in M_n(K)$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé dans K. On a: $det(expU)=\exp(Tr.U)$.*

On sait que la matrice U est triangulable dans $\mathcal{M}_n(K)$ et que le déterminant et la trace sont invariants dans les changements de base. Lorsque le polynôme caractéristique est scindé dans K, la matrice est triangulable et pour une matrice écrite sous forme triangulaire la propriété est évidente.

Exponentielle d'une matrice de Jordan d'ordre n, nilpotente d'ordre n-1. Cas scindé

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{(r-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exponentielle d'une matrice bloc de Jordan (cas scindé)

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda.I_n + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Dérivabilité et analycité dans End(E).

Les complications proviennent toutes de la non commutativité de l'algèbre End(E). On commencera par étudier des exemples.

Théorème 1.7.1 *L'application: $u \longrightarrow Id_{End(E)}$ est déribable et sa dérivée est l'application nulle: $h \longrightarrow 0$.*

Théorème 1.7.2 *L'application: $u \longrightarrow f_p(u) = u^p$ est dérivable sur End(E).*

◇ Pour p=1, on a $u + h - u - h = 0$. La dérivée de la fonction $u \longrightarrow u$ est donc l'application linéaire $h \longrightarrow u(h) = h$, c'est l'application identique $Id_{End(E)}$. La dérivée de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même: $U \longrightarrow U$ est la matrice unité I_n.

Pour p=2, on a: $(u+h)^2 - u^2 = u.h + h.u$ et $||(u+h)^2 - u^2 - u.h - h.u|| \leq ||h||^2$. La dérivée de l'application $\varphi_2 : u \longrightarrow u^2$ est donc l'application linéaire: $h \longrightarrow \varphi_2(h) = u.h + h.u$.

Il est clair que la dérivée de la fonction $u \longrightarrow u^p$ existe; sa dérivée serait longue à écrire. ◇

Théorème 1.7.3 *L'application $u \longrightarrow \exp u$ (resp. $U \longrightarrow \exp U$) est continue et dérivable à l'origine. Sa dérivée est l'application: $h \longrightarrow h$.*

◇ On a, en effet:

$$\exp u - \exp 0 = \exp u - 1_E = u + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = u.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{(n-1)}}{n!} = u + u^2.\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^{(n-2)}}{n!}$$

et en désignant par $|| * ||$ une norme d'algèbre:

$$||\exp u - 1_E|| \leq ||u||.||\exp u|| \leq ||u||.\exp ||u||$$

qui tend vers 0 avec u. L'application $u \longrightarrow \exp u$ est donc continue à l'origine. De plus

$$||\exp h - 1_E - h|| \leq ||h||^2.||\exp h|| \leq ||h||^2.\exp ||h||$$

qui tend vers 0 avec h. Elle est dérivable à l'origine et sa dérivée est l'application linéaire $h \longrightarrow h$. ◇

Pour étudier la dérivabilité de l'application $u \longrightarrow e^u$, il est préférable de procéder autrement. On profite de ce que l'on est en dimension finie pour étudier, une base ayant été choisie, le problème de la dérivabilité de l'application: $U \longrightarrow exp\, U$ où U est la matrice de u dans cette base. La matrice $U = (u_{i,j})$ est une fonction analytique des n^2 variables complexes u_{ij}.

Théorème 1.7.4 *L'application $U \longrightarrow exp\, U$ est une fonction analytique en chacune des n^2 variables $(u_{i,j})_{1 \leq (i,j) \leq n}$.*

Théorème 1.7.5 *L'application $u \longrightarrow exp\, u$ (resp.$U \longrightarrow exp\, U$) est de classe C^∞ sur End(E) (resp. $M_n(K)$) (i.e: est indéfiniment dérivable sur End(E) (resp. $M_n(K)$).*

1.8 Etude de la fonction $t \rightarrow e^{A.t}$.

Par définition, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout réel t, on pose $At = tA = (t.a_{ij})$. Il est évident que $det(A.t) = det(t.A) = t^n.det(A)$ et $tr(A.t) = tr(t.A) = t.tr(A)$.

Théorème 1.8.1 *Quels que soient les nombres réels t_1 et t_2, on a:* $\exp A(t_1 + t_2) = \exp(A.t_1).\exp(A.t_2)$

En effet, les deux matrices $A.t_1$ et $A.t_2$ commutent. On démontre facilement les théorèmes suivants:

Théorème 1.8.2 *On suppose que les deux matrices A et B, èlèments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, commutent, les couples de matrices suivantes: B et $e^{A.t}$, A ete$^{B.t}$, $e^{A.t}$ et $e^{B.t}$ commutent.*

Théorème 1.8.3 *L'application $\varphi : t \rightarrow e^{A.t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée première au point t est l'application linéaire:*

$$\varphi'(t) : h \rightarrow A.e^{A.t}.h = e^{A.t}.A.h.$$

qu'on note plus simplement $\varphi'(t) = A.e^{A.t}$. Sa dérivée p-iéme au point t est $\varphi^{(p)}(t) = A^p.e^{A.t}$

Théorème 1.8.4 *Si les matrices A et B commutent, on a:*

$$\frac{d}{dt}(e^{A.t}.e^{B.t}) = A.e^{A.t}.e^{B.t} + B.e^{A.t}.e^{B.t} = (A+B).e^{A.t}.e^{B.t} = (A+B).e^{(A+B).t}$$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes.

2.1 Idéal annulateur.

Soit U la matrice, dans une base donnée, de l'endomorphisme u.

2.1.1 L'algèbre $K[u]$.

Considérons l'application f de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par : $q \longrightarrow q(u)$. On vérifie immédiatement que l'image de $K[X]$ par cette application est une sous K-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. On désigne classiquement cette algèbre par le sigle $K[u]$, mais s'il est vrai que les èlèments de $K[u]$ s'écrivent comme des polynômes de u à coefficients dans K, cette écriture n'est pas unique et u n'est pas une indéterminée, comme l'est X dans $K[X]$.

Théorème 2.1.1 *Tout endomorphisme u d'un K-espace vectoriel de dimension finie est algèbrique sur K.*

- ◇ Le noyau $ker(f)$ n'est pas nul, car le K-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 et, par conséquent, la famille d'endomorphismes : $1, u, \cdots, u^{n^2}$ est liée. Ce noyau est un idéal a de l'anneau principal $K[X]$ (appelé idéal annulateur de u); soit q_u son unique générateur unitaire. On a donc $q_u(u) = 0$ et q_u est le polynôme minimal de l'endomorphisme u ou de la matrice U. ◇

Ce qui précède montre que le degré de q_u est $\leq n^2$; on verra qu'il est $\leq n$.

Théorème 2.1.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u et soit u_F la restriction de l'endomorphisme u au sous-espace F.*
Le polynôme minimal q_F de u_F est un diviseur du polynôme q_u.

- ◇ Il est clair que l'on a $q_u(u_F) = 0$. Par conséquent, l'idéal annulateur b de q_F dans l'anneau $K[X]$ contient l'idéal a; par conséquent, (q_F) divise q_u. ◇

Théorème 2.1.3 (Théorème Cayley-Hamilton) *Tout endomorphisme u d'un K-espace vectoriel de dimension finie est racine de son polynôme caractéristique $\chi_u(X)$.*

- ◇ Une base ayant été choisie, soit $U = (u_{i,j})$ la matrice de l'endomorphisme u dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E.

  Soit $V(X) = X.I_n - U$; posons $V = (v_{i,j})$, on a : $v_{i,j}(X) = \delta_{i,j}.X - u_{i,j}$ et $detV(X) = \chi_u(X)$. Désignons par $W(X) = (w_{i,j}(X))$ la matrice où $w_{i,j}(X)$ est le cofacteur du terme $v_{i,j}(X)$ de la matrice $V(X)$; remarquons que $w_{i,j}(X)$ est un èlèment de $K[X]$ de degré $n-1$ et que l'on a : $V(X)^t W(X) = det(V(X)).I_n = \chi_u(X).I_n$.

  On peut écrire $W(X) = \sum_{k=o}^{n-1} X^k.W_k$, les W_k étant des èlèments de $\mathcal{M}_n(K)$ et l'on a donc :

$$(X.I_n - U).\sum_{k=o}^{n-1} X^k.W_k = \chi_u(X)I_n \tag{2.1}$$

Z On ne peut pas déduire le résultat cherché de cette égalité en y remplaçant X par U. Les deux membres de (2.1) appartiennent à $M_n(K[X])$. Pour qu'ils soient égaux, il faut et il suffit que les coefficients des termes en X^k, $(0 \leq k \leq n-1)$ soient égaux.

Ecrivons $\chi_u(X) = \sum_{k=o}^{n-1} p_k X^k$ et l'on développe le premier membre. L'égalité (2.1) est équivalente aux n égalités suivantes :

$$-U.W_0 = p_0.I_n$$

$$-U.W_1 + W_0 = p_1.I_n$$

$$\dots$$

$$-U.W_k + W_{k-1} = p_k.I_n$$

$$\dots$$

$$W_{n-1} = p_n.I_n.$$

et l'on a : $\chi_u(U) = -U.W_0 + (W_0 - U.W_1)U + \cdots + (W_{k-1} - U.W_k))U^k + \cdots + (W_{n-2} - U.W_{n-1}).U^{n-1} + W_{n-1}.U^n = 0$ car les termes se simplifient deux à deux. ◇

Corolaire 2.1.1 *Le polynôme minimal $q_u(X)$ de l'endomorphisme u est un diviseur du polynôme caractéristique $\chi_u(X)$. Le degré du polynôme minimal q_u est $\leq n$.*

Exemple 2.1.1 *Voici un exemple dans lequel le degré du polynôme minimal est strictement inférieur à celui du polynôme caractéristique : a désigne un nombre complexe quelconque :*

$$U = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = (X-a)^5$ et le polynôme minimal est $q_u(X) = (X-a)^3$.

Théorème 2.1.4 *Dans une clôture algèbrique $\overline{K}$ de K, le polynôme minimal $q_u(X)$ et le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ ont les mêmes racines, les multiplicités de chaque racine dans l'un et l'autre polynôme pouvant être différentes. Autrement dit, les racines dans $\overline{K}$ du polynôme minimal q_u sont les valeurs propres de l'endomorphisme $u \in R$.*

◇ Soit $q_u(X) = X^k + a_1.X^{k-1} + \cdots + a_k$; si λ est valeur propre de l'endomorphisme u, quel que soit l'entier positif m, λ^m est une valeur propre de l'endomorphisme u^m. En effet, il existe, par hypothèse, un $\boldsymbol{x} \neq 0$ associé à λ tel que : $u(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ et, par conséquent : $u^m(\boldsymbol{x}) = \lambda^m.\boldsymbol{x}$.

On a par conséquent $q_u(u)(\boldsymbol{x}) = 0 = (u^k + a_1.u^{k-1} + \cdots + a_k).\boldsymbol{x} = (\lambda^k + a_1.\lambda^{k-1} + \cdots + a_k).\boldsymbol{x}$ Le vecteur $\boldsymbol{x}$ n'étant pas nul, c'est le scalaire $\lambda^k + a_1.\lambda^{k-1} + \cdots + a_k$ qui l'est. Les deux polynômes $q_u(X)$ et $\chi_u(X)$ sont scindés et peuvent s'écrire :

$$q_u(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r} \tag{2.2}$$

$$\chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{c_1} \cdots (X-\lambda_r)^{c_r} \tag{2.3}$$

avec $m_i \leq c_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq r$, et $\sum_{i=o}^{r} c_i = n$. ◇

Dans ce qui suit, on se placera dans le "cas scindé", c'est-à-dire dans le cas où le polynôme $\chi_u(X)$ a toutes ses racines dans K. C'est évidemment le cas si K est algèbriquement clos. De ce fait, le polynôme minimal $q_u(X)$ et le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ seront toujours écrits écrits sous la forme (2.2) ou (2.3).

2.2 Sous-espaces propres

Théorème 2.2.1 *Soit u un endomorphisme du K-espace vectoriel E de dimension finie n. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ les r valeurs propres distinctes de u, et $(E_1, \cdots, E_r)$ les r espaces propres associés. La somme $E_1 + \cdots + E_r$ est directe.*

◇ Supposons que la somme $E_1, + \cdots + E_r$ ne soit pas directe. Il existe une famille $(x_i)_{(1\leq i\leq r)}$ avec $x_i \in E_i$, $x_i \neq 0$ et des scalaires μ_i, non tous nuls, tels que $\mu_1.x_i + \cdots + \mu_r.x_r = 0$. Parmi toutes les relations de cette forme, on en choisit une dans laquelle le nombre de scalaires μ_i non nuls est minimum et supposons que $\mu_1.x_1 + \cdots + \mu_p.x_p = 0$. Formons la quantité :

$$u(\mu_1.x_1 + \cdots + \mu_p.x_p) - \lambda_1(\mu_1.x_1 + \cdots + \mu_p.x_p) = (\lambda_2 - \lambda_1)\mu_2.x_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_1)\mu_p.x_p = 0$$

qui ne comporte que $p - 1$ termes ce qui est impossible. ◇

Bien entendu, on n'a pas, en général, $E = E_1 + \cdots + E_r$ et les sous-espaces propres ne deviennent intéressants que dans le cas où ils coïncident avec les sous-espaces caractéristiques.

Théorème 2.2.2 *La dimension du sous-espace propre E_i associé à la valeur propre λ_i est inférieure ou égale à la multiplicité c_i de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$.*

◇ On peut supposer que $i = 1$ et que la dimension p de E_1, soit $\geq c_1 + 1$. On considère une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que les p premiers vecteurs soient dans E_1, La matrice U de u dans cette base est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} M & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \end{pmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme $\chi_u(X)$ serait divisible par $(X - \lambda_1)^{c^{i+1}}$. ◇

2.2.1 Décomposition de E liée à un polynôme annulateur.

Pour tout polynôme $p \in K[X]$ et tout $\boldsymbol{x} \in E$, posons, par définition, $p.\boldsymbol{x} = p(u)(\boldsymbol{x})$, $p(u).\boldsymbol{x}$ désignant l'image de $\boldsymbol{x} \in E$ par l'endomorphisme $p(u) \in End(E)$.

Théorème 2.2.3 *On considère un K-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme u de E. Soit $P \in K[X]$ et $P(X) = \prod_{i=1}^{r} q_i(X)$ une décomposition du polynôme P en produits de polynômes deux à deux étrangers. On a $Ker\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker\, q_i(u)$.*

◇ Posons $N = Ker\, P(u)$ et, pour tout i $(1 \leq i \leq r)$, $N_i = Ker\, q_i(u)$. Il n'y a rien à démontrer si $r = 1$. Si $r = 2$, le théorème de Bezout montre qu'il existe deux polynômes s_1 et s_2, élèments de $K[X]$, tels que :

$$q_1.s_1 + q_2.s_2 = 1.$$

On a donc

$$q_1(u).s_1.(u) + q_2(u).s_2(u) = I$$

et, pour tout $x \in E$:

$$q_1(u).s_1(u).\boldsymbol{x} + q_2(u).s_2(u).\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

Supposons que

$$x \in Ker\,(P(u)) = Ker\,(q_1(u).q_2(u))$$

on vérifie immédiatement que $q_1(u).s_1(u).\boldsymbol{x} \in Ker\, q_2(u) = N_2$ et $q_2(u).s_2(u).\boldsymbol{x} \in Ker\, q_1(u) = N_1$; on a donc bien $N \subset N_1 + N_2$.

D'autre part, la relation $q_1(u).\boldsymbol{x} = 0$ implique $q_2(u).q_1(u).\boldsymbol{x} = 0$ et donc $N_1 \subset N$ et, aussi, $N_2 \subset N$. On a donc $N = N_1 + N_2$.

D'autre part, la relation (2.4) montre que si $\boldsymbol{x} \in N_1 \cap N_2$, alors $\boldsymbol{x} = 0$. Par conséquent : $N = N_1 \oplus N_2$.

On raisonne par récurrence à partir de r=2. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang r-1. Les deux polynômes $A(X) = \prod_{i=1}^{r-1} q_i(X)$ et $q_r(X)$ sont étrangers. Posons $M = Ker\, A(X)$. D'après ce qui précéde, on a : $N = M \oplus N_r$. On a donc : $N = M \oplus N_r = (N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1}) \oplus N_r = N_1 \oplus \cdots N_{r-1} \oplus N_r$, ce qui établit la proposition. ◇

Corolaire 2.2.1 *On considère un K-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme u de E. Soit $P \in K[X]$ et $P(X) = \prod_{i=1}^{r} q_i(X))$ une décomposition du polynôme P en produits de polynômes deux à deux étrangers. On suppose que $P(u) = 0$; alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker\,(q_i(u))$*

Avec les notations précédentes, on voit qu'il existe r polynômes (s_i) $(1 \leq i \leq r)$ tels que l'on ait :

$$q_1(X).s_1(X) + \cdots + q_r(X).s_r(X) = 1 \tag{2.5}$$

Théorème 2.2.4 *Les r endomorphismes $p_i(u) = q_i(u).s_i(u)$, $1 \leq i \leq r$, sont des projecteurs du K-espace vectoriel E. On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{r} p_i(E)$.*

Ecrivons la démonstration pour $p_1(u)$. On a en effet, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$:

$$p_1(u).\boldsymbol{x} = p_1(u).(p_1(u)\boldsymbol{x} + \cdots + p_r(u)).\boldsymbol{x} = (p_1(u))^2.\boldsymbol{x}$$

Définition 2.2.1 *Soit λ_i une valeur propre de u dont la multiplicité dans le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ est c_i. On appelle sous-espace caractéristique de u relatif à la valeur propre λ_i (ou composante primaire de u relative à la valeur propre λ_i) le sous-espace vectoriel: $C_i = Ker(\lambda_i.I - u)^{c_i}$.*

Théorème 2.2.5 *Soit $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{c_1} \cdots (X - \lambda_r)^{c_r}$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u. L'espace vectoriel E est somme directe de ses sous-espaces caractéristiques :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_i = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(\lambda_i.I - u)^{c_i}$$

Théorème 2.2.6 *Soit $q_u(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$ le polynôme minimal de l'endomorphisme u. L'espace vectoriel E est somme directe des noyaux $M_i = Ker(\lambda_i.I - u)^{m_i}$:*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(\lambda_i - u)^{m_i}$$

◇ Il est évident que l'on a, pour tout i, $1 \leq i \leq r$, $M_i = Ker(\lambda_i.I - u)^{m_i} \subset C_i = Ker(\lambda_i.I - u)^{c_i}$. On a, par conséquent, pour tout i : $M_i = C_i$, c'est à dire $Ker(\lambda_i.I - u)^{m_i} = Ker(\lambda_i.I - u)^{c_i}$. ◇

Théorème 2.2.7 *Le sous-espace caractéristique C_i est stable par u. Soit u_i la restriction de l'endomorphisme u à $M_i = C_i$. Le polynôme minimal de u_i est $(X - \lambda_i)^{m_i}$.*

◇ On a $(\lambda_i.I - u)^{c_i} \circ u = u \circ (\lambda_i.I - u)^{c_i}$, par conséquent, $\boldsymbol{x} \in C_i$ qui est équivalent à $(\lambda_i.I - u)^{c_i}\boldsymbol{x} = 0$, implique $(\lambda_i.I - u)^{c_i}u(\boldsymbol{x}) = 0$, donc $\boldsymbol{x} \in C_i$ implique $u(\boldsymbol{x}) \in C_i$ ce qui prouve la stabilité de C_i.

Et puisque $M_i = C_i$, le sous-espace M_i est stable par u. $q_u(X)$ appartient à l'idéal annulateur de la restriction u_i de u à $M_i = C_i$, donc le polynôme minimal de u_i divise le polynôme minimal $q_u(X)$. Par définition $(\lambda_i.I - u)^{m_i}$=0 et, par conséquent, le polynôme minimal $q_i(X)$ de u_i divise $(X - \lambda_i.I)^{m_i}$. Il est donc de la forme $q_i(X) = (X - \lambda_i.I)^{n_i}$ avec $n_i \leq m_i$. Si, pour une valeur de i, on avait $n_i < m_i$, le polynôme $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i.I)^{n_i}$ serait de degré strictement inférieur à n et serait nul en $X=u$. Le polynôme $q_u(X)$ ne serait donc pas le polynôme minimal de l'endomorphisme u. On a donc, pour tout $i_{(1\leq i\leq r)}$, $m_i=n_i$. ◇

Théorème 2.2.8 *La dimension du sous-espace caractéristique C_i est c_i. E étant somme directe des C_i, on obtient une base de E en choisissant une base dans chaque C_i et en réunissant ces bases.*

Théorème 2.2.9 *Dans cette base, la matrice de u s'écrit:*

$$U=\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_r \end{pmatrix}$$

et on a : $det(X.I_n-U)=\prod_{i=1}^{r}det(X.I_i-U_i)=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i.I)^{c_i}$ ce qui implique que, pour tout i, $dim(C_i)=c_i$.

2.2.2 Endomorphismes semi-simples et matrices diagonalisables.

Définition 2.2.2 *Un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel est dit semi-simple (ou diagonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

On a les résultats suivants :

1. Une condition nécessaire pour que la matrice $U\in\mathcal{M}_n(K)$ soit diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(K)$) est que ses valeurs propres appartiennent à K. Cette condition n'est pas suffisante.
2. Une condition suffisante pour que la matrice $U\in M_n(K)$ soit diagonalisable est qu'elle ait n valeurs propres distinctes. Cette condition n'est pas nécessaire.
3. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme $u\in End_K(E)$ soit diagonlisable dans $M_n(K)$ est que soient satisfaites les deux conditions suivantes;
   - (a) Le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ de u est scindé dans $K[X]$,
   - (b) La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de sa valeur propre dans $\chi_u(X)$.
4. Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice U soit diagonalisable est que son polynôme minimal $q_U(X)$ soit scindé dans $K[X]$ et que ses racines soient simples.
5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E soit diagonalisable est que E soit somme directe de ses sous-espaces propres.
6. Pour un endomorphisme $u\in L(E)$, Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - (a) u est semi-simple;
   - (b) Aucun polynôme élèment de $K[u]$ n'est nilpotent.

Définition 2.2.3 *On dit que l'endomorphisme $u\in End_E$ est nilpotent d'ordre $q+1$ s'il n'est pas nul et si l'on a : $u^q\neq 0$ et u^{q+1}=0. Si U est la matrice de u dans une base de E, la matrice U de u est dite nilpotente d'ordre $q+1$ si l'on a : $U^q\neq 0$ et $U^{q+1}=0$.*

2.3 Les théorèmes de Jordan.

On suppose jusqu'à la fin du chapitre[1] que l'endorphisme u a toutes ses valeurs propres dans K.

---

[1] Dans les chapitres suivants, on étudie la situation générale.

2.3.1 Endomorphismes et matrices nilpotentes.

Théorème 2.3.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme u (resp. une matrice U) soit nilpotent (resp. nilpotente) est que toutes ses valeurs propres soient nulles.*

◇ La condition est nécessaire : Lorsque u est nilpotente d'ordre r, son polynôme minimal divise le polynôme annulateur X^r; il est donc de la forme X^m avec $m \leq r$ et toutes les valeurs propres sont nulles.

La condition est suffisante : les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal qui est donc de la forme X^met l'on a donc $u^m = 0$. L'endomorphisme u est donc nilpotent dordre m. ◇

Corolaire 2.3.1 *Une matrice nilpotente d'ordre ≥ 2 n'est pas diagonalisable.*

◇ Son polynôme minimal a toutes ses racines nulles, elles ne sont donc pas distinctes. ◇

Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre m, il existe un seul sous-espace caractéristique qui est l'espace E tout entier.

2.3.2 Structure des endomorphismes nilpotents. Bases de Jordan.

Nous allons chercher des formes réduites d'une matrice nilpotente d'ordre m.

Théorème 2.3.2 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre m de E. Il existe une base $\mathbf{e}$ de E, stable par u (i.e : $u(\mathbf{e}) \subset \mathbf{e}$) dont on peut numéroter les élèments $(e_1, \cdots, e_n)$ de telle façon que l'on ait soit $u.e_j = e_{j-1}$ soit $u.e_j = 0$.*

Une telle base s'appelle "base de Jordan" de u. Soit U la matrice de u dans une base de Jordan de u (on constatera qu'il peut exister plusieurs bases de Jordan pour le même endomorphisme u), les seuls termes non nuls de la matrice U sont des 1 placés sur la diagonale "immédiatement supérieure" à la diagonale principale.

Par exemple :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une forme de Jordan "à deux blocs". On peut réecrire le théorème (2.3.2) sous la forme suivante :

Théorème 2.3.3 *Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que u est $(q+1)$-nilpotent, $q \leq n-1$. Il existe une base de E, dans laquelle la matrice de u s'écrit*

$$U_J = \begin{pmatrix} 0 & \nu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \nu_q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où chaque scalaire ν_i $(2 \leq i \leq q)$ est égal à 0 ou 1.

On commence par démontrer deux lemmes concernant les sous-espaces vectoriels $E_r = Ker(u^r)$. (On a posé $E = E_0 = Ker(u^0)$).

Lemme 2.3.1 *Soit u un endomorphisme $q+1$-nilpotent; la suite des sous-espaces :*

$$\{O\} = E_0 = Ker(u^0) \subset E_1 = Ker(u^1) \subset \cdots \subset E_p = Ker(u^p) \subset \cdots \subset E_q = Ker(u^q) \subset E_{q+1} = E$$

est strictement croissante et on a $u(E_{p+1}) \subset E_p$ pour tout $p > 0$.

◇ Commençons par démontrer que la suite des E_i est strictement croissante. Il suffit évidemment de montrer qu'elle n'est pas stationnaire, donc qu'il n'existe pas k, $0 \leq k \leq q$ tel que $E_{k+1} = E_k$.

Raisonnons par l'absurde, s'il existe un tel indice k, $0 \leq k \leq q$, pour lequel on a $E_{k+1} = E_k$. Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, on a :

$$0 = u^{q+1}(\boldsymbol{x}) = u^{k+1}.u^{q-k}(\boldsymbol{x})$$

Donc, l'égalité $E_{k+1} = E_k$ entrainerait $u^{q-k}(\boldsymbol{x}) \in E_k$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, donc $u^q(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et u serait nilpotent d'ordre q. La second assertion est évidente : l'équalité $u^{p+1}(\boldsymbol{x}) = 0$ entraine $u^p(u(\boldsymbol{x})) = 0$. ◇

Lemme 2.3.2 *Soient p un entier tel que $1 \leq p \leq q$ et F un sous espace vectoriel de E tel que $F \cap E_p = \{0\}$. On a alors $u(F) \cap E_{p-1} = \{0\}$ et u induit un isomoprhisme de F sur $u(F)$.*

◇ Considérons un vecteur $\boldsymbol{x} \in u(F) \cap E_{p-1}$; il existe un $\boldsymbol{y} \in F$ tel que $\boldsymbol{x} = u(\boldsymbol{y})$ et comme $u^{p-1}(\boldsymbol{x}) = u^p(y)$, la relation $x \in u(F) \cap E_{p-1}$, implique $y \in F \cap E_p$; par conséquent, $\boldsymbol{y} = 0$ et donc $\boldsymbol{x} = 0$.

L'application de F dans $u(F)$ induite par u est évidemment linéaire et surjective; elle est aussi injective, car si $\boldsymbol{y} \in F$ vérifie $u(\boldsymbol{y}) = 0$, alors $u(\boldsymbol{y}) \in E_{p-1}$, le raisonnement précédent montre que $y = 0$. Puisque l'on est en dimension finie, u est un isomorphisme. ◇

Lemme 2.3.3 *Il existe des sous-espaces vectoriels $(F_k)_{1 \leq k \leq q+1}$ de E qui possèdent les propriètés suivantes :*

1. *E_p est somme directe de E_{p-1} et de F_p pour tout p tel que $1 \leq p \leq q+1$.*
2. *u applique injectivement F_p dans F_{p-1} pour tout p tel que $2 \leq p \leq q+1$.*

◇ On choisit pour F_{q+1} un supplémentaire de E_q dans E_{q+1}. Le sous-espace $u(F_{q+1})$ est contenu dans E_q et ne rencontre E_{q-1} qu'en 0 (lemme (2.3.2)); par conséquent, il existe un supplémentaire F_q de E_{q-1} dans E_q qui contient $u(F_{q+1})$. On poursuit cette construction descendante :

$$\begin{array}{l}
E = E_{q+1} = E_q \bigoplus F_{q+1} \\
E_q = E_{q-1} \bigoplus F_q \\
E_{q-1} = E_{q-2} \bigoplus F_{q-1} \\
\vdots \\
E_{k+1} = E_k \bigoplus F_{k+1} \\
E_k = E_{k-1} \bigoplus F_k \\
\vdots \\
E_2 = E_1 \bigoplus F_2 \\
E_1 = F_1
\end{array}$$

Que $u\ : F_k \to F_{k-1}$ soit injectif est une conséquence du lemme. ◇

Revenons à la démonstration du théorème. On vient de démontrer que $E = F_{q+1} \cdots \bigoplus F_1$ avec, pour tout k, $u(F_{k+1}) \subset F_k$. On choisit une base adaptée à cette décomposition (on notera que cette base n'est pas unique).

Désignons par $e_{11}, \cdots, e_{1r_1}$ une base de F_{q+1}. Puisque u est injectif, les vecteurs $u(e_{1k})$, $1 \leq k \leq r_1$, dans F_q sont linéairement indépendantes et leur suite peut être completée en une base de F_q : $u(e_{11}) = e_{21}, \cdots, u(e_{1r_1}) = e_{2r_1}, e_{2,r_1+1}, \cdots, e_{2,r_2}$.

En continuant ce processus, on obtient une base de $F_1 = E_1$ de la forme : $e_{q+1,1}, \cdots, e_{q+1,r_{q+1}}$ qui vérifie les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
u(e_{q,k}) & = & e_{q+1,k} & \text{pour } 1 \leq k \leq r_q \\
u(e_{q+1,k}) & = & 0 & \text{pour } r_q + 1 \leq k \leq r_{q+1}
\end{array}\right.$$

Il est clair que E est somme directe des $r+1$ sous-espaces F_k et, par conséquent, les $r_1 + \cdots r_{q+1}$ vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ forment une base de E.

On peut écrire ces vecteurs dans le tableau suivant :

$$\left\uparrow\begin{array}{llllllll}
e_{1,1} & \cdots & e_{1,r_1} & & & & & \\
u(e_{1,1}) & \cdots & u(e_{1,r_1}) & e_{2,r_1+1} & \cdots & e_{2,r_2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u^q(e_{1,1}) & \cdots & u^q(e_{1,r_1}) & u^{q-1}(e_{2,r_1+1}) & \cdots & u^{q-1}(e_{2,r_2} & \cdots & e_{q+1,r_{q+1}}
\end{array}\right.$$

En écrivant ces vecteurs colonne après colonne, en commençant par le bas et par la gauche, on trouve la base cherchée, dite "base de Jordan". En effet , on a : $u(e_j) = 0$ ou $u(e_j) = e_{i+1}$ $\diamond$

2.4 Les théorèmes de Jordan.

Définition 2.4.1 *On appelle matrice réduite de Jordan toute matrice de la forme :*

$$U_J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Par exemple, des deux matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ seule la seconde est réduite. La première se compose de deux blocs.

Théorème 2.4.1 *(Premier Théorème de Jordan) Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension n. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Toues les valeurs propres sont dans K,*
2. *Il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u a la forme :*

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_r \end{pmatrix}$$

où chaque matrice est une matrice de Jordan.

$\diamond$ 1 $\Rightarrow$ 2 Soit u_k la restriction de u à C_k dont la valeur propre est λ_k de multiplicité k. Pour chaque valeur de k, la restriction de $u_k - \lambda_k.Id$ de $u - \lambda.Id$ à C_k est nilpotente. D'après le théorème (2.3.3), il existe une base telle que :

$$U_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \nu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \nu_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & \nu_q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

où chaque scalaire ν_i $(2 \leq i \leq q)$ est égal à 1 ou à 0. Cette matrice n'est pas nécéssairement une matrice de Jordan réduite, mais il est trés facile de la décomposer en blocs de matrices de Jordan.

2 $\Rightarrow$ 1 La démonstration est évidente. $\diamond$

Théorème 2.4.2 *(Théorème de Jordan) Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, scindé, il existe un couple unique (Δ, ν) d'endomorphismes de E tels que :*

1. *Δ est diagonalisable et ν est nilpotent,*
2. *$u = \Delta + \nu$*

3. *les endomorphismes Δ et ν permutent (i.e : $\Delta \circ \nu = \nu \circ \Delta$)*

◇ Les démonstrations sont évidentes à partir de ce qui précède, à l'exception de celle de l'unicité. De l'égalité $\Delta \circ \nu = \nu \circ \Delta$, on déduit que tout sous-espace propre de Δ est ν-stable, car

$$\Delta(\nu(\boldsymbol{x})) = \nu(\Delta(\boldsymbol{x})) = \nu(\lambda\,\boldsymbol{x})$$

En triangulant la restriction de ν à chaque sous-espace propre de Δ, on déduit que les polynômes caractéristiques de Δ et $\Delta + \nu$ sont égaux, puis que les sous-espaces propres de Δ sont aussi les sous-espaces caractéristiques de $u = \Delta + \nu$. Cela entraine que la restriction de Δ à N_i est $\lambda_i.I_i$. ◇

Chapitre 3

Généralités et premiers théorèmes.

3.1 Présentation du problème.

Une équation différentielle scalaire du premier ordre est une équation fonctionnelle (ce qui signifie que l'inconnue est une fonction) de la forme :

$$g(t, x, x') = 0$$

où x' désigne la fonction dérivée de la fonction x de la variable t. L'inconnue est la fonction $t \longrightarrow x(t)$. La fonction g est, par exemple, une application de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.1 *Résoudre (ou intégrer une équation différentielle), c'est trouver toutes les fonctions* $t \longrightarrow u(t)$ *définies et dérivables sur un intervalle (non réduit à un point) de la droite numérique* $\mathbb{R}$ *qui vérifient l'égalité* $g(t, u(t), u'(t)) = 0$.

Les équations différentielles dans lesquelle la variable est réelle et celle dans lesquelles elle est complexe donnent lieu à deux théories distinctes. La raison en est que les propriétés d'une fonction réelle ou complexe d'une variable réelle, dérivable sur un intervalle ouvert de la droite numérique $\mathbb{R}$ et celles d'une fonction holomorphe d'une variable complexe sont très différentes les unes des autres.

Par exemple, une fonction d'une variable complexe, holomorphe dans un domaine[1], est de classe C^∞ dans ce domaine et elle y est même analytique, alors qu'une fonction d'une variable réelle, de classe C^1 sur un intervalle ouvert, n'est pas, en général, de classe C^p $(p > 1)$ et, même si elle est de classe C^∞, elle peut ne pas être analytique[2].

Dans ce qui suit, la variable est réelle. Par contre, chaque fois qu'on le pourra, on choisira de rechercher les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et, plus généralement, à valeurs dans un espace de Banach complexe.

Définition 3.1.2 *Une équation différentielle de la forme* $g(t, x, x') = 0$ *est appelée équation "implicite" (i.e : non résolue par rapport à* x'*). On dit qu'une équation differentielle de la forme* $x' = f(t, x)$ *est écrite sous forme normale.*

Le théorème d'inversion locale (cf.Annexe) ne permet pas, en général de ramener une équation differentielle implicite à une famille d'équations normales. Ce théorème est un théorème d'existence et même dans les cas simples, le lien entre l'équation implicite et les équations écrites sous forme normale n'est pas toujours facile à établir.

On pourrait donc être tenté de ne considérer que des équations écrites sous forme normale; mais, on rencontre la situation suivante:

L'étude de certains problèmes (par exemple, celle des systèmes dynamiques) peut introduire des équations différentielles implicites dont l'étude sera faite au cas par cas.

Dans tout ce qui suit (hormis l'étude de certains exemples trés simples) et en particulier dans l'étude de l'existence des solutions, on ne considérera que des équations écrites sous forme normale.

---

[1] un domaine est un ouvert connexe

[2] On pourra considérer la fonction φ définie de la façon suivante : sur la demi-droite négative $\varphi(x) = 0$; sur la demi-droite strictement positive $\varphi(x) = exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

Remarques :

1. On dit plus souvent "intégrer une équation différentielle" que "résoudre une équation différentielle"; on appelle volontiers une solution une "intégrale". La raison en est que dans l'immense majorité des cas, on ne sait pas résoudre une équation différentielle, mais il arrive que l'on sache ramener cette résolution au calcul d'une ou de plusieurs intégrales, ce que l'on appelle des "quadratures" [3].

2. Bien entendu, cela ne signifie pas que l'on sache calculer ces primitives en "termes finis". Par exemple, les fonctions:

$$t \longrightarrow \int_0^t \frac{sin\, s}{s} ds \ , \quad t \longrightarrow \int_0^t e^{-s^2} ds \ , \quad t \longrightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s^3+ps+q}} ds$$

ne s'écrivent pas comme fonctions composées de fonctions considérées comme "élèmentaires". Mais on considère que si l'on a ramené l'intégration de l'équation différentielle au calculs de primitives, on a accompli un progrès.

Définition 3.1.3 *On appelle courbe intégrale de l'équation différentielle* $g(t,x,x')=0$ *le graphe dans l'espace affine* $\mathbb{R}^2$*, rapporté à un repère* $(0t,0x)$ *de ses solutions* $t \longrightarrow u(t)$

3.2 Solutions.

Rien ne prouve qu'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ ait des solutions. Savoir répondre à cette question est évidemment essentiel. On constatera que cette réponse dépend des propriétés de régularité de la fonction f et de l'ensemble dans lequel on cherche les solutions.

Dans ce qui suit, E est un espace de Banach, le plus souvent, $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$.

Définition 3.2.1 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E^n$ *et* f *une application continue de* Ω *dans* E*. Une solution de l'équation différentielle d'ordre* n

$$f(t,x,x',\ldots,x^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

est un couple $(J,\mathbf{u})$ *formé d'un intervalle* $J \subset \mathbb{R}$ *non réduit à un point et d'une application* $\mathbf{u}$ *de* J *dans* E *vérifiant les conditions suivantes :*

- *la fonction* $\mathbf{u}$ *est définie et* n *fois dérivable sur* J*;*
- *pour tout* $t \in J$*,* $(t,u(t),\ldots,u^{(n)}(t))$ *appartient à* Ω*.*
- *pour tout* $t \in J$*, on a* $f(t,u(t),u'(t),\ldots,u^{(n)}(t)) = 0$*.*

On dit aussi, pour simplifier, que u *est une solution de l'équation différentielle sur* J*.*

Définition 3.2.2 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E^{n-1}$ *et* f *une application continue de* Ω *dans* E*. Une solution de l'équation différentielle d'ordre* n *écrite sous forme normale*

$$x^{(n)} = f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

est un couple $(J,\mathbf{u})$ *formé d'un intervalle* $J \subset \mathbb{R}$ *non réduit à un point et d'une application* $\mathbf{u}$ *de* J *dans* E *vérifiant les conditions suivantes :*

- *la fonction* $\mathbf{u}$ *est* n *fois dérivable sur* J
- *pour tout* $t \in J$*, le point* $(t,u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$ *appartient à* Ω*.*
- *pour tout* $t \in J$*, on a* $u'(t) = f(t,u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$*.*

---

[3] "quadrature" signifie: calcul d'une primitive.

Remarque : On remarquera qu'une équation différentielle normale d'ordre n peut s'écrire :

$$\begin{cases} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n' & = & f(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

C'est à dire que l'on s'est ramené à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1.

Il convient d'insister sur le fait qu'il s'agit d'un système carré. Le nombre d'équations est égal au nombre des inconnues qui sont les fonctions $(t \longrightarrow x_k)_{1 \leq k \leq n)}$.

Exemple 3.2.1

1. *L'équation pendulaire:*
$$\theta'' + \sin\theta = 0 \tag{3.3}$$
est équivalente au système différentiel:
$$\begin{cases} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -\sin x_1 \end{cases}$$
2. *L'équation*
$$x'' + \omega^2.x = 0 \tag{3.4}$$
est équivalente au système différentiel
$$\begin{cases} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -\omega^2.x_1 \end{cases}$$

Les exemples les plus simples montrent, par contre, qu'une équation différentielle qui a une solution en a une infinité, ce qui oblige à préciser ce problème. Ceci peut être fait de plusieurs façons. Celle qui sera choisie dans un premier temps est la suivante: le couple (t_0, x_0) étant donné, on cherchera à étudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ possédant la propriété suivante: on exige de la solution $t \longrightarrow x(t)$ qu'elle vérifie la condition $x(t_0) = x_0$. Le couple (t_0, x_0) s'appelle un système de conditions initiales. Ce problème s'appelle problème de Cauchy.

Définition 3.2.3 *(Solution de conditions initiales données) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E^{n-1}$ et f une application continue de Ω dans E. Une solution de conditions initiales $(t_0, (u_{0,k})_{0 \leq k \leq n-1})$ de l'équation différentielle*
$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{3.5}$$
est une solution $(J, \boldsymbol{u})$ de l'équation différentielle vérifiant les conditions :
$$t_0 \in J \ , \quad u^{(k)}(t_0) = u_{0,k} \ , \ 0 \leq k \leq n-1$$

Une conséquence immédiate de la définition d'une solution est que toute solution $u \ : J \longrightarrow E$ (s'il en existe) est de classe C^1 sur J. En effet, la fonction $t \longrightarrow u'(t) = f(t, u(t))$ est continue sur I (théorème de dérivabilité des fonctions composées). Par contre, elle n'est pas en général de classe C^p.

Exemple : L'équation : $x' = 2\sqrt{|x|}$ admet sur $\mathbb{R}$ la solution u de conditions initiales $(t_0, 0)$, $t_0 > 0$, définie de la façon suivante : $u(t) = 0$ pour $|t| \leq t_0$ et $u(t) = (t - t_0)^2$ pour $|t| \geq t_0$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (examiner ce qui se passe en t_0). On remarquera que cette équation différentielle a une infinité de solutions de conditions initiales (0,0).

Théorème 3.2.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$) et f une application continue de Ω dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). On considère l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $u \ : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $u \ : J \longrightarrow \mathbb{C}^n$) soit une solution de l'équation différentielle de conditions initiales de (t_0, x_0) est que :*

- *$(t, u(t))$ appartienne à Ω pour tout $t \in J$,*

- *l'application u soit solution de l'équation intégrale :*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in J \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) est appelée équation intégrale associée à l'équation $x' = f(t, x)$.

◇ Il suffit de remarquer que l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $t \to f(t, u(t))$ est continue (théorème des fonctions composées), puis d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure. ◇

Remarque : Ce que l'on cherche est de construire au moyen de l'équation (3.6) une suite de fonctions qui convergeraient (avec une bonne topologie) vers une solution de l'équation de conditions initiales (t_0, x_0)

On prendra garde que, faute d'hypothèses supplémentaires sur f, l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ peut avoir une solution unique de conditions initiales (t_0, x_0) et que l'on peut construire, au moyen de l'équation (3.6) une suite de fonctions divergente.

On peut constater sur l'exemple suivant que la continuité de la fonction f est insuffisante :

Exemple 3.2.2 *Considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :*

$$\begin{cases} f(t,x) = -2t & \text{pour } x \geq t^2 \\ f(t,x) = -2.\dfrac{x}{t} & \text{pour } |x| < t^2 \\ f(t,x) = 2t & \text{pour } x \leq -t^2 \end{cases}$$

L'équation différentielle $x' = f(t, x)$ admet la solution $t \to u(t) = 0$ de conditions initiales (0,0)[4]. On vérifiera que la suite de fonctions définie par récurrence au moyen de l'équation (3.6) à partir de la fonction $u_0(t) = t^2$ est divergente.

3.3 Théorème d'existence.

Dans la suite de ce chapitre, on admettra un théorème d'existence et d'unicité locale (qui seront démontrés dans le chapitre 2) et dont on développera les conséquences.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des équations différentielles de la forme $x' = f(t, x)$, la seule hypothèse faite sur f étant d'être continue. On démontrera au chapitre 2 que cette condition est suffisante pour affirmer l'existence d'une solution locale de conditions initiales (t_0, x_0) sous la seule réserve que ce point appartienne à Ω, mais que ceci devient inexact si l'on n'est plus, comme ici, en dimension finie.

Par contre, l'exemple précédent prouve qu'avec des fonctions f continues, l'unicité des solutions de conditions initiales données n'est pas assurée. On va introduire, pour la fonction f une condition nouvelle :

Définition 3.3.1 *(définition d'une application lipschitzienne). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $t \to k(t)$ une fonction numérique positive. Soit f une application de Ω dans E. On dit que la fonction f est lipschitzienne dans Ω par rapport à la seconde variable x et pour la fonction $k(t)$ si, pour tout couple $(t, x_1), (t, x_2)$ appartenant à Ω, on a : $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k(t).|x_1 - x_2|$.*

Pratiquement, on n'utilise que des fonctions lipschitziennes pour une fonction constante $k > 0$ et l'on introduit une notion légèrement plus faible :

Définition 3.3.2 *(définition d'une application localement lipschitzienne). Soient k une constante strictement positive et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Une application $f : \Omega \to E$ est dite localement k-lipschitzienne sur cet ensemble par rapport à la seconde variable x, si, pour tout point $(t, x) \in \Omega$, il existe un voisinage de (t, x) dans lequel f est k-lipschitzienne.*

On dit alors que l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est localement lipschitzienne dans Ω.

Proposition 3.3.1 *(rappel) Une application $f : \Omega \to E$ de classe C^1 par rapport la seconde variable est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur Ω.*

---

[4] On peut facilement démontrer que c'est la seule.

Exemples :

1. La fonction $(t,x) \rightarrow x^2$ est continue et lipschitzienne par rapport à x dans $\mathbb{R} \times J$, J étant un intervalle borné, car on a : $|x_2^2 - x_1^2| \leq 2|x_1 + x_2|.|x_2 - x_1|$. On peut aussi remarquer que $f'_x(t,x) = 2x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle est bornée sur $\mathbb{R} \times J$ ce qui constitue une autre démonstration du fait que $(t,x) \rightarrow x^2$ est lipschitzienne par rapport à x dans $\mathbb{R} \times J$

2. La fonction $(t,x) \rightarrow \sqrt{|x|}$ est continue dans tout voisinage de l'origine, mais elle n'est localement lipschitzienne par rapport à x dans aucun voisinage de l'origine. En effet, le rapport :
$$\frac{\sqrt{|x_2|} - \sqrt{|x_1|}}{x_2 - x_1}$$
n'est pas borné lorsque x_1 et x_2 tendent vers 0 (prendre par exemple $x_1 = s^2$, $x_2 = s^4$ où s est un paramètre qui tend vers 0).

Théorème 3.3.1 *(admis) (théorème d'existence et d'unicité locale de Cauchy). Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$, *tels que* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et soit* $f\ : \Omega \rightarrow E$ *une application continue, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable* x *en tout point de* Ω*. Il existe un intervalle ouvert* $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, *tel que l'équation différentielle* $x' = f(t,x)$ *admette une solution* (J,u) *de conditions initiales* (t_0, x_0) *et cette solution est unique.*

3.4 Intégrales maximales.

Corolaire 3.4.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, soient* (J_i, u_i), $i = (1,2)$, *deux solutions de mêmes conditions initiales* (t_0, x_0), *ces deux solutions* u_i *coincident sur l'intervalle ouvert* $J_1 \cap J_2$

$\diamond$ La démonstration sera faite au chapitre suivant. $\diamond$

Exemple 3.4.1 *Prenons un exemple simple :* $x' = x$. *La solution constante nulle étant solution, et les hypothèses du théorème de Cauchy étant vérifiées, on peut en conclure que les autres solutions de cette équation différentielle ne s'annulent pas.*

Définition 3.4.1 *(Intégrales maximales) Une solution* u *de conditions initiales* (t_0, x_0) *définie sur un intervalle* J *est dite maximale si toute autre solution de mêmes conditions initiales est une restriction de* u.

Remarque : Il revient au même de dire qu'une solution maximale est une solution que l'on ne peut pas prolonger.

Théorème 3.4.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$, *contenant* (t_0, x_0) *et* f *une application continue de* Ω *dans* E, *localement lipschitzienne en tout point de* Ω *par rapport à la seconde variable.*

Il existe une unique solution maximale de conditions initiales (t_0, x_0) *de l'équation différentielle* $x' = f(t,x)$. *Son intervalle de définition est un intervalle* ouvert *appartenant à* $proj_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

3.5 Intégrales générales d'une équation différentielle scalaire.

Considérons une équation différentielle $x' = f(t,x)$ admettant une unique solution de conditions initiales (t_0, x_0) et ceci, t_0 étant fixé, quel que soit x_0. On obtient ainsi une famille de solutions indexées par le paramètre x_0.

Exemple 3.5.1 *Considérons l'équation différentielle :* $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$ *(équation à variables séparables)*

On a donc $f(t,x) = (1+x^2)/(1+t^2)$, qui est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est aussi de classe C^1 en la variable x sur $\mathbb{R}^2$ donc localement lipschitzienne pour cette variable. Les hypothèses du théorème de Cauchy sont donc vérifiées. On peut vérifier que toute fonction : $t \longrightarrow x_a = \dfrac{t+a}{1-at}$ où a désigne une constante réelle quelconque est une intégrale de l'équation.

Définition 3.5.1 *Toute famille de fonctions dépendant d'un paramètre, solutions d'une équation différentielle s'appelle intégrale générale de cette équation.*

Dans l'exemple précédent, les fonctions : $t \longrightarrow t$ $(a = 0)$ ou $t \longrightarrow \dfrac{1+t}{1-t}$ $(a = 1)$ obtenues en donnant au paramètre une valeur particulière, sont des intégrales particulières de l'équation différentielle. Par contre, il n'existe pas de valeur du paramètre qui donne la fonction $t \longrightarrow x_\infty = -\dfrac{1}{t}$ qui est pourtant bien une intégrale.

Si l'on pose $b = 1/a$, on obtient une autre intégrale générale qui s'écrit $t \longrightarrow x_b = \dfrac{bt+1}{b-t}$ et l'intégrale que l'on avait "perdue" $t \longrightarrow x_\infty = -\dfrac{1}{t}$ est ici obtenue pour la valeur $b = 0$, mais on ne retrouve plus l'intégrale $x = t$.

Dans ce cas particulier, on rétablirait facilement la situation en paramètrant l'intégrale générale soit avec la droite numérique achevée, soit avec la droite projective.

Des situations de ce type expliquent que la notion d'intégrale générale aurait besoin d'être précisée.

Enfin, remarquons la présence dans les deux intégrales générales que l'on a écrites, d'une "singularité mobile" $(x = 1/a)$ dans la première ou $(x = b)$ dans la seconde.

Précisons cette notion : la solution de conditions initiales (t_0, x_0) est la fonction :

$$x = \frac{t(1+t_0x_0) + x_0 - t_0}{1 + t_0x_0 - (x_0 - t_0)t}$$

Considérons deux cas : • $t_0 = x_0$: il existe une seule intégrale $(x = t)$ correspondant à ces conditions initiales. Cette intégrale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et c'est la seule.

• $t_0 \neq x_0$: à chaque couple $t_0, x_0)$ correspond une intégrale qui a un point singulier d'abscisse : $\dfrac{1+t_0x_0}{x_0-t_0}$.

Un point singuler mobile est, par définition, un point singulier de chaque solution d'une famille de solutions (qui peut ne pas être l'intégrale générale) et qui dépend des conditions initiales.

On remarquera, à nouveau, que l'examen de l'équation diférentielle ne permet pas de prévoir l'existence de ce point singulier. La conséquence de cette situation est qu'il n'est pas possible de prévoir les intervalles sur lesquels les intégrales sont définies. Dans le cas de cet exemple, l'équation différentielle admet une solution de conditions initiales (t_0, x_0) avec $t_0 \neq x_0$ dans chacun des intervalles :

$$\left(-\infty, \frac{1+t_0x_0}{x_0-t_0}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{1+t_0x_0}{x_0-t_0}, +\infty\right)$$

La seule intégrale définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est $t \longrightarrow x = t$. On pourra montrer que toute courbe intégrale maximale, mis à part la première bissectrice, est une demi-hyperbole.

On peut, au terme de cet exemple, donner une autre définition d'une intégrale générale : c'est une famille de fonctions dépendant d'un paramètre qui permet de reconstruire l'équation différentielle et, ce qui est plus important, qui permet d'obtenir toutes les intégrales de l'équation différentielle, soit en fixant la valeur d'un paramètre (spécialisation), soit en cherchant une enveloppe ou des lieux de points singuliers, donc essentiellement à travers des dérivations.

Exemple 3.5.2 *Considérons l'équation différentielle :* $tx'^2 - 2xx' + t = 0$ *(équation homogène).*

Si l'on cherche à écrire l'équation précédente sous sa forme normale, on obtient deux équations correspondant aux fonctions $f(t,x,x') = (x \pm \sqrt{x^2 - t^2})/t$. Ces fonctions sont définies, continues sur $\{(t,x) | t \neq 0, x^2 - t^2 \geq 0\}$ et de classe C^1 en x sur $\Omega = \{(t,x) | t \neq 0, x^2 - t^2 > 0\}$. Le théorème de Cauchy s'applique donc et permet de conclure à l'existence et à l'unicité locale pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$ pour chacune des deux équations, ce qui fait deux solutions pour l'équation initiale.

De plus, d'après le théorème 1.5.2, il existe, toujours pour chacune des deux équations, une unique solution maximale ayant pour condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$. Ces solutions étant contraintes à demeurer dans Ω, on remarquera qu'elles ne "touchent" en aucun cas la parabole $x^2 = t^2$. Ainsi, la courbe tracée en gras sur la figure 3.1 est une courbe intégrale, mais pas une solution maximale d'après la définition 1.5.3. Ainsi que le montre l'exemple précédent, cette distinction est nécessaire pour obtenir un résultat d'unicité d'une solution maximale.

Une intégrale générale de cette équation est : $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{1}{2a}$ où a est une constante réelle non nulle.

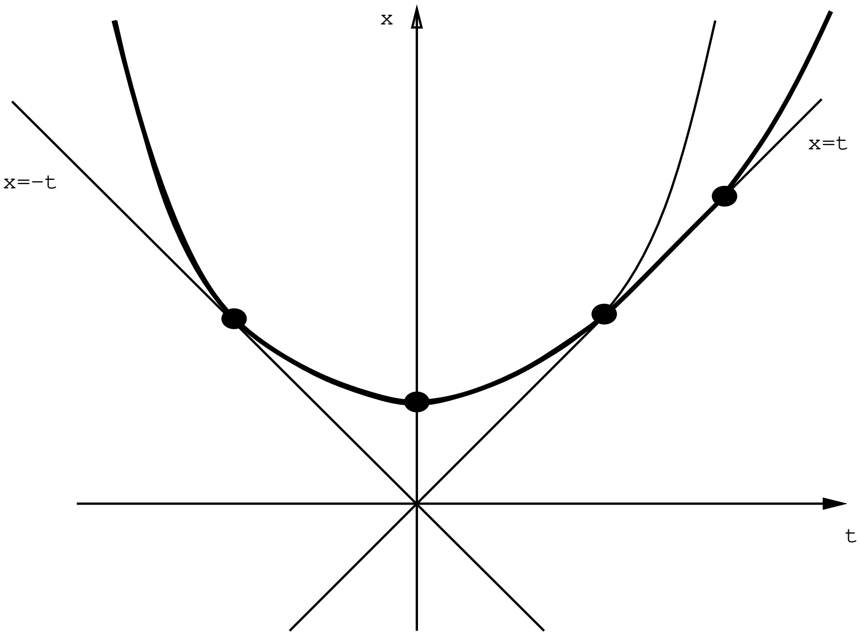

FIG. 3.1 - *Une courbe intégrale pour l'exemple 1.4.2.*

Les courbes intégrales P_a sont des paraboles tangentes aux droites d'équation $x = t$ et $x = -t$ qui constituent l'enveloppe des graphes P_a. Il est évident que ces deux fonctions $x \rightarrow t$ et $x \rightarrow -t$ sont des intégrales de l'équation différentielle; elles ne sont obtenues pour aucune valeur du paramètre a. On appelle ces intégrales singulières.

Cet exemple montre, en outre, qu'il n'existe aucune réponse à la question : "Combien passe-t'il de courbes intégrales par un point du plan?" (cf.fig. 3.1). On peut seulement affirmer qu'il n'existe aucune solution passant par un point de $U\ : x^2 - t^2 < 0$ puisque dans ce cas, le polynôme du deuxième degré en x' n'a pas de solution.

3.6 Formes différentielles.

3.6.1 Rappels et généralités.

Définition 3.6.1 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle 1-forme différentielle (ou forme différentielle de degré 1) définie sur D, une application de D dans $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, donc une application de la forme: $(t, x) \rightarrow \omega(t, x)$, $\omega(t, x)$ étant une forme linéaire définie sur D.*

Cette forme s'écrit donc nécessairement :

$$(dt, dx) \rightarrow \omega(t, x)(dt, dx) = P(t, x).dt + Q(t, x).dx$$

P et Q étant des applications de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque les deux applications P et Q sont de classe C^1 sur D, on dit que la forme différentielle ω est de classe C^1 sur D.

Une 1-forme différentielle définit un champ de vecteurs dans le plan de la façon suivante : "l'origine" du vecteur est le point (t, x) et son "extrémité" est $(t + P(t, x), x + Q(t, x))$.

Si l'on considère deux applications T et X d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ possédant certains caractères de régularité qui seront précisés dans la suite, on peut leur associer l'équation différentielle : $T(t, x) - X(t, x).x' = 0$.

Inversement, toute équation différentielle écrite sous forme normale $x' = f(t,x)$, donne naissance à la 1-forme différentielle : $\omega(t,x)(dt,dx) = f(t,x).dt - dx$. On dit alors que l'on a écrit l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ "sous forme différentielle".

Exemple : Considérons l'équation différentielle : $x' = \dfrac{x}{t}$ et la forme différentielle : $\omega(t,x)(dt,dx) = \dfrac{x.dt - t.dx}{t}$.

Elle ne donne aucune information sur l'équation. Par contre, si l'on considère la forme :

$$\omega_0(t,x)(dt,dx) = \frac{x.dt - t.dx}{t^2 + x^2}$$

On vérifie que $\omega_0(t,x)(dt,dx) = -d\left(\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right)$ ce qui permet d'intégrer l'équation. On voit sur cet exemple très simple, qu'en fait, les formes différentielles intéressantes associées à l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ sont de la forme :

$$\omega_0(t,x)(dt,dx) = G(t,x)(f(t,x).dt - dx)$$

Définition 3.6.2 *Une application* $G\ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *choisie de manière que* $\omega_0(t,x)(dt,dx)$ *soit la différentielle d'une application* $F\ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est appelée un facteur intégrant.*

3.6.2 Fonctions différentiables et formes différentielles.

L'exemple le plus simple de 1-forme différentielle est la différentielle d'une fonction différentiable. Soit $F\ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable au point $(a,b) \in D$. La différentielle de F au point (a,b) est la 1-forme linéaire :

$$(dt,dx) \to dF(a,b)(dt,dx) = F'_t(a,b).dt + F'_x(a,b).dx$$

et si la fonction $(t,x) \to F(t,x)$ est différentiable en tout point $(t,x) \in D$, on obtient une famille de 1-formes différentielles : $(dt,dx) \to dF(t,x)(dt,dx) = F'_t(t,x).dt + F'_x(t,x).dx$. La fonction $(t,x) \in D \to F(t,x)$ s'appelle une primitive de la forme différentielle.

Rappelons le théorème de Schwarz :

Théorème 3.6.1 *(admis). Soit* $F\ : D \subset R^2 \to \mathbb{R}$ *une application définie dans un voisinage* D *du point* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, telle que les quatre dérivées partielles secondes existent dans un voisinage de* (a,b) *et que les deux dérivées* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}$ *et* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}$ *sont continues en* (a,b)*. Alors, on a :* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(a,b) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(a,b)$.

Corolaire 3.6.1 *Une condition nécessaire pour que la 1-forme différentielle :* $\omega(t,x)(dt,dx) = P(t,x).dt + Q(t,x).dx$ *de classe* C^1 *dans un ouvert* D*, admette une primitive dans* D *est que l'on ait, en tout point de* D *:* $P'_x = Q'_t$.

Définition 3.6.3 *Toute forme différentielle :*

$$\omega(t,x)(dt,dx) = P(t,x).dt + Q(t,x).dx$$

vérifiant la relation $P'_x = Q'_t$ *dans* D *est dite fermée sur* D.

Les formes fermées dans un ouvert D ne sont pas nécessairement des différentielles de fonctions définies dans D; autrement dit, elles n'ont pas nécessairement de primitives. Cela provient du fait que la valeur de l'intégrale curviligne le long d'un chemin γ image de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(s))ds$$

dépend en général du chemin γ et pas seulement de ses extrémités.

Définition 3.6.4 *On dit qu'un ouvert* D *est simplement connexe si tout lacet dans* D *est homotope à un point dans* D.

Parmi les ouverts simplements connexes du plan, signalons :

- les ouverts étoilés (un ouvert D est dit étoilé par rapport à un point $a \in D$, si pour tout point $x \in D$, le segment $[a, x]$ est contenu dans D). (Il est clair qu'un ouvert simplement connexe est connexe, la réciproque étant fausse.)
- Tout ouvert convexe est simplement connexe (il est étoilé par rapport à chacun de ses points).
- Le plan réel privé d'une demi-droite fermée est simplement connexe.
- Une bande du plan réel dont le bord est constitué de deux droites parallèles est un ouvert simplement connexe.
- Le plan réel privé d'un point est un ouvert connexe, non simplement connexe.
- Le plan réel privé d'un segment est un ouvert connexe, non simplement connexe.

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème 3.6.2 *(admis). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 1-forme différentielle de classe C^1 dans un ouvert simplement connexe D admette une primitive dans D est qu'elle soit fermée dans D.*

3.6.3 Théorème d'existence.

Il concerne les équations différentielles de la forme : $x' = \dfrac{T(t,x)}{X(t,x)}$ auxquelles on associe la forme différentielle : $\omega(t,x)(dt,dx) = T(t,x).dt - X(t,x).dx$

Théorème 3.6.3 *Supposons que la forme différentielle $\omega = T.dt - X.dx$ soit de classe C^1 et soit fermée dans un ouvert simplement connexe D. Soit (t_0, x_0) un point de D en lequel $X(t_0, x_0)$ soit non nul. L'équation différentielle*

$$x' = \frac{T(t,x)}{X(t,x)}$$

a une solution de conditions initiales (t_0, x_0) définie dans un voisinage de t_0.

◇ Les hypothèses du théorème étant satisfaites, il existe une fonction F de classe C^2 sur D et telle que : $dF(t,x)(dt,dx) = T(t,x).dt - X(t,x).dx$. On considérons l'équation $F(t,x) = F(t_0, x_0)$ et on applique le théorème des fonctions implicites (cf. section 9). ◇

3.6.4 Intégrale première d'une équation différentielle.

Définition 3.6.5 *Soit ω une forme différentielle de classe C^1 dans un ouvert D simplement connexe du plan. On suppose que ω est fermée dans D et soit F une primitive de ω dans D. On dit que l'équation $F = c$, où c est une constante, est une intégrale première de la forme ω. Par abus de langage, on dit aussi que $F = c$ est une intégrale première de l'équation différentielle qui a donné naissance à ω.*

Remarque : On obtient ainsi les solutions sous forme implicite.

3.6.5 Propriétés des facteurs intégrants.

Définition 3.6.6 *Soit $\omega = P(t,x).dt + Q(t,x).dx$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert simplement connexe D de $\mathbb{R}^2$. Une application G de D dans $\mathbb{R}$ telle que la forme :*

$$G.\omega = G(t,x).(P(t,x).dt + Q(t,x).dx) \tag{3.7}$$

soit fermée, s'appelle un facteur intégrant de ω dans D.

Théorème 3.6.4 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait :*

$$d(G.\omega) = P.\frac{\partial G}{\partial x} - Q.\frac{\partial G}{\partial t} + G.(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}) = 0 \tag{3.8}$$

On peut démontrer que pour résoudre l'équation aux dérivées partielles, c'est à dire pour trouver toutes les fonctions G satisfaisant l'équation, il faut savoir intégrer l'équation (3.8). Mais on ne cherche qu'une solution de (3.7) et il peut se faire qu'il soit possible d'en trouver une. Le paragraphe précédent fournit des exemples de facteurs intégrants.

Théorème 3.6.5 *Soient G et H deux facteurs intégrants d'une 1-forme différentielle ω sur D. La fonction $(t,x) \to \dfrac{G(t,x)}{H(t,x)}$ si elle n'est pas constante, est une intégrale première de ω sur D.*

◇ Supposons que l'on connaisse un facteur intégrant G et l'intégrale première associée F. Cherchons d'autres intégrales premières H sous la forme $H = G.F$, H étant une application de classe C^1 sur D dans $\mathbb{R}$. On trouve que la fonction H doit vérifier l'équation :

$$p.\frac{\partial H}{\partial x} - q.\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

on a, d'autre part :

$$\frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{\partial F}{\partial x}.dx = 0$$

et $P.dt + Q.dx = 0$. Par conséquent :

$$\frac{\partial G}{\partial t}.\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}.\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{D(G,H)}{D(t,x)} = 0$$

on a donc : $H = G.\phi(F)$, ϕ étant une fonction dérivable quelconque. ◇

3.6.6 Exemple.

Exemple 3.6.1 *Considérons l'équation différentielle :*

$$x' = (x-4t)^2 \tag{3.9}$$

Remarquons que les deux fonctions : $t \to x = 4t-2$ et $t \to x = 4t+2$ sont solution de cette équation différentielle. Considérons la forme différentielle :

$$\omega(t,x)(dt,dx) = (x-4t)^2 dt - dx \tag{3.10}$$

Cette forme différentielle n'est pas fermée. Considérons la fonction :

$$F(t,x) = e^{-4t}.\frac{x-4t-2}{x-4t+2} \tag{3.11}$$

On trouve que :

$$dF(dt,dx) = -\frac{e^{-4t}}{(x-4t+2)^2}\left((x-4t)^2 dt - dx\right) \tag{3.12}$$

Autrement dit si la forme (3.10) n'est pas fermée, la forme (3.12) l'est dans l'ouvert complémentaire de la droite D d'équation $x-4t+2=0$; cet ouvert n'est pas simplement connexe, mais chacun des deux demi-plans dont le bord est la droite D, est simplement connexe et l'on doit étudier la forme différentielle dans chacun de ces demi plans.

La fonction $G(t,x) = -\dfrac{e^{-4t}}{(x-4t+2)^2}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle : $\omega(t,x)(dt,dx) = \omega(t,x)(dt,dx) = (x-4t)^2 dt - dx$. Dans chacun de ces demi-plans, une intégrale première de l'équation différentielle (3.9) est donc :

$$e^{-4t}\frac{x-4t-2}{x-4t+2} = c \tag{3.13}$$

La solution de l'équation différentielle de condition initiales (t_0,x_0) avec $x_0 - 4t_0 + 2 \neq 0$ est localement définie dans un voisinage de t_0 par l'équation implicite :

$$e^{-4t}\frac{x-4t-2}{x-4t+2} = e^{-4t_0}\frac{x_0-4t_0-2}{x_0-4t_0+2} = c. \tag{3.14}$$

qui, dans ce cas particulier, donne une expression explicite de x en fonction de t et d'une constante qui ne dépend que des conditions initiales.

L'intégrale générale de l'équation différentielle est donc :

$$x = 4t + 2.\frac{1 + c.e^{4x}}{1 - c.e^{4x}} \tag{3.15}$$

On remarquera que les deux droites d'équation $x - 4t - 2 = 0$ et $x - 4t + 2 = 0$ sont des asymptoyes à toutes les courbes de l'intégrale générale.

Exemple 3.6.2 *Considérons maintenant l'équation différentielle :*

$$x' = \frac{x - tx^2}{t + t^2 x} \tag{3.16}$$

et la forme différentielle:

$$\omega(t, x)(dt, dx) = \frac{x - tx^2}{t + t^2 x} dt - dx \tag{3.17}$$

qui est de classe C^∞ dans le complémentaire de la droite $t = 0$ et de l'hyperbole équilatère d'équation $tx = 1$, courbes qui définissent différents ouverts simplement connexes.

La forme différentielle n'est fermée dans aucun de ces ouverts. Par contre, on vérifiera que la forme différentielle :

$$\omega_0(t, x)(dt, dx) = \frac{e^{tx}}{t^2}(x(tx - 1).dt + t(tx + 1)dx) \tag{3.18}$$

est fermée dans les deux ouverts simplement connexes $t > 0$ et $t < 0$.

Une intégrale première de l'équation est:

$$F(t, x) = \frac{x}{t} e^{tx} = c \tag{3.19}$$

La solution de condition initiale $(t_0 \neq 0, x_0 \neq -\frac{1}{t_0})$ est définie implicitement par la relation:

$$\frac{x}{t} e^{tx} = \frac{x_0}{t_0} e^{t_0 x_0} \tag{3.20}$$

Cette équation ne permet pas de calculer explicitement x en fonction de t. Mais l'équation (3.19) est plus maniable que l'équation différentielle même si l'on dispose pour celle-ci, d'un théorème d'existence et d'unicité qui joue le même rôle que celui du théorème des fonctions implicites pour l'équation (3.19).

3.7 Equations particulières

3.7.1 Equations différentielles à variables séparées.

Définition 3.7.1 *Une équation différentielle à variables séparées est une équation de la forme :* $x' = \dfrac{a(t)}{b(x)}$.

Une équation différentielle à variables séparables est une équation que l'on peut mettre sous cette forme par des opérations algèbriques. Par exemple, l'équation différentielle : $x' = e^{t+x}$ est une équation à variables séparables puisqu'on peut la mettre sous la forme $x' = \dfrac{e^t}{e^{-x}}$.

Remarque : La quasi totalité des équations différentielles que l'on "sait intégrer" sont celles que l'on peut transformer par des difféomorphismes locaux en une équation à variables séparées.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que l'application a est de classe C^1 sur un intervalle ouvert contenant x_0 et que l'application b est de classe C^1 et ne s'annule pas sur un intervalle ouvert contenant x_0. Il existe donc un ouvert étoilé $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant (t_0, x_0) et dans lequel l'application de U dans $\mathbb{R}$: $(t, x) \rightarrow \dfrac{a(t)}{b(x)}$

est de classe C^1 . On cherche les applications u définies, continues et dérivables dans un voisinage de t_0 telles que l'on ait, dans ce voisinage: $u'(t) = \dfrac{a(t)}{b(u(t))}$ (et dans ce cas, u sera aussi de classe C^1).

On associe à cette équation différentielle la 1-forme différentielle :

$$\omega(t,x)(dt,dx) = a(t).dt - b(x).dx.$$

de classe C^1 dans U, et c'est de l'étude de cette forme différentielle que l'on déduira les propriétés de l'équation différentielle.

Il faut remarquer que toute valeur x_1 qui annule $b(x)$ est une valeur singulière pour l'équation différentielle, mais n'est pas une valeur singulière pour la forme différentielle. On verra ce qu'il en est exactement sur des exemples.

Cherchons s'il existe une application $F\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que, dans un voisinage étoilé U du point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on ait :

$$dF(t,x)(dt,dx) = \omega(t,x)(dt,dx) = a(t)dt - b(x)dx.$$

On sait qu'une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi (donc pour que la forme ω soit exacte) est que la forme différentielle ω soit fermée ($d\omega = 0$), condition évidemment vérifiée ici. La fonction F est facile à calculer : soient A une primitive de a dans un voisinage de x_0 et B une primitive de b dans un voisinage de y_0. La fonction $F = A - B$ convient.

Considérons maintenant l'équation en x : $F(t,x) = F(t_0,x_0)$. Dans un voisinage V de t_0, elle définit x comme fonction de t sous la réserve que $F'_x(t_0,x_0) = b(x_0)$ soit non nul; cette fonction $t \to x$ prend la valeur x_0 au point t_0 et est solution de l'équation différentielle $x'(t) = \dfrac{a(t)}{b(x(t))}$. C'est donc une solution de conditions initiales (t_0,x_0) de l'équation. L'équation $F(t,x) = c$ est une intégrale première de l'équation différentielle.

Exemple 3.7.1 *Considérons l'équation différentielle :* $x' = x^2$.

Elle admet une unique solution de conditions initiales $(t_0 = 0, x_0 \neq 0)$ qui est : $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$. Cette famille de fonctions dépendant d'un paramètre x_0, est donc une intégrale générale de l'équation. On remarquera la présence de la singularité "mobile" $t = 1/x_0$ (singularité qui dépend des conditions initiales), alors que la fonction : $(t,x) \to f(t,x) = x^2$ est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$ et même analytique sur $\mathbb{R}^2$.

3.7.2 Equations différentielles homogènes.

Afin de conserver des notations usuelles, nous utiliserons dans cette section une équation différentielle notée $y' = f(x,y)$.

Définition 3.7.2 *On dit qu'une équation différentielle $y' = f(x,y)$ est homogène si elle vérifie la condition suivante : λ désignant une variable, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, autrement dit, si f est une fonction homogène de degré 0. Plus généralement, on dira que l'équation différentielle $g(x,y,y') = 0$ est homogène si la fonction g vérifie la condition suivante : $g(\lambda x, \lambda y, y') = g(x,y,y')$.*

Exemple 3.7.2

1. $x' = \dfrac{at + bx}{ct + dx}, c \neq 0$. *Les équations homogène de ce type jouent un role trés important dans la suite de ce cours et un chapitre leur est consacré.*
2. $x' = \dfrac{4t + x}{t}$.
3. $x' = \dfrac{t^2 + x^2}{t^2 - x^2}$

Remarques :

- Il existe un groupe de transformations (les homothéties de centre 0) qui opère sur l'ensemble des courbes intégrales.

Cela signifie qu'une homothétie quelconque de centre 0 transforme une courbe intégrale en une autre courbe intégrale. En particulier, si $\mathcal{C}$ est une courbe intégrale particulière, la transformée $\mathcal{C}_\lambda$ de $\mathcal{C}$ dans l'homothétie (O, λ) est une courbe intégrale. On obtient ainsi une intégrale générale de l'équation différentielle.

- Les équations homogènes sont le prototype des équations qu'un "changement de fonction inconnue",[5] qui ne dépend pas de l'équation étudiée, ramène à une équation différentielle à variables séparables. Ce sont donc des équations dont l'intégration se ramène à des quadratures. Ceci est lié à l'existence du groupe de transformations signalé en 1.
- Les intégrales singulières, lorsqu'il y en a, sont des fonctions linéaires que l'on peut touver sans chercher l'intégrale générale. Il suffit de chercher les solutions de l'équation différentielle de la forme $x = vt$ (v constant).

Etudions l'équation différentielle : $y' = f(\dfrac{y}{x})$ dans chacun des intervalles ouverts $x < 0$ et $x > 0$. La restriction à chacun de ces demi-plans (qui sont des ouverts simplement connexes), de l'application : $(x, y) \to (x, \frac{y}{x}) = (x, t)$ est un difféomorphisme de classe C^∞, de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

L'équation $y' = f(\dfrac{y}{x})$ devient : $t'x + t - f(t) = 0$ qui est une équation à variables séparables.

On commence par remarquer que, si t_0 est une racine réelle de l'équation $t = f(t)$, l'équation admet la solution $t(x) = t_0$, donc l'équation $y' = f(\dfrac{y}{x})$ admet la solution $y(x) = t_0.x$. On verra que cette intégrale est, en général, singulière.

Soit T le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des racines de $t - f(t)$ et l'on suppose que T est un ouvert de $\mathbb{R}$. On étudie donc l'équation dans $\mathbb{R}_+^* \times T$ ou dans $\mathbb{R}_-^* \times T$.

On considère la forme différentielle fermée : $\omega(dx, dt) = \dfrac{dt}{t - f(t)} + \dfrac{dx}{x}$ qui permet d'achever l'intégration sous la forme paramètrique :

$$ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{s - f(s)} \ , \quad y(t) = tx(t)$$

Exemple 3.7.3 *Considérons l'équation différentielle* $y' = -\dfrac{4x + y}{x}$.

On peut étudier cette équation sur chacune des deux demi-droites ouvertes $x > 0$ et $x < O$. On remarquera que, par contre, la forme différentielle : $\omega(dx, dy) = (4x + y)dx + xdy$ est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Le changement de fonctions $y = tx$ transforme l'équation différentielle en la suivante :
$t'x = -(2t + 4)$. Cette équation admet la solution $t = -2$ (et l'équation initiale, la solution $y = -2x$) et si $t \neq 2$, on considère la forme différentielle : $\omega_0(dx, dt) = 2\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dt}{t + 2}$.

L'intégrale générale est : $y = \dfrac{h}{x} - 2x$; $y = -2x$ n'est pas une intégrale singulière puisqu'elle est obtenue pour la valeur $h = 0$. Les courbes intégrales sont les hyperboles C_h de centre O et d'asymptotes $y + 2x = 0$ et $y = 0$. Il est difficile de considérer la première asymptopte comme étant l'enveloppe de la famille des hyperboles.

---

[5] Le problème de l'action d'un difféomorphisme local sur un champ de vecteurs et le théorème de rectification seront étudiés dans un chapitre ultérieur.

3.8 Annexe : le théorème des fonctions implicites

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et V un ouvert de $\mathbb{C}^2$ (resp. $\mathbb{R}^2$). On suppose que la fonction $(x, y, z) \longrightarrow g(x, y, z)$ est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{R}^3$) dans C , vérifiant certains critères de régularité qui seront introduits progressivement.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de Ω tel que $g(x_0, y_0, z_0) = 0$; soit U un voisinage ouvert de x_0 dans C , V un voisinage ouvert de (y_0, z_0) dans $\mathbb{C}^2$, $U \times V \subset \Omega$. Soit (x_0, y_0, z_0) un point de $\mathbb{C}^3$ tel que $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Il parait raisonnable, dans un premier temps, de se placer dans le cas où l'on peut localement résoudre dans un voisinage du point $t_0, xo)$ l'équation en z, $g(x, y, z) = 0$, ce qui permettra de remplacer l'équation $g(x, y, y') = 0$ par une ou plusieurs équations différentielles de la forme $y' = f(x, y)$.

Une équation différentielle de la forme $g(x, y, y') = 0$ est appelée équation non résolue (sous entendu, par rapport à y'). On dit qu'une équation differentielle de la forme $y' = f(x, y)$ est écrite sous forme normale. L'outil fondamental qui permet de prouver l'existence de la forme normale (mais n'aide en rien à son calcul) est le théorème d'inversion locale et son corollaire, le théorème des fonctions implicites dont voici un énoncé adapté à cette situation:

Théorème 3.8.1 *(théorème des fonctions implicites). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^3$. Soit $(x, y, z) \longrightarrow g(x, y, z)$ une application de classe C^p de Ω dans C et soit (a, b, c) un point de Ω tel que $g(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Il existe alors un voisinage ouvert V de (a, b) dans $\mathbb{C}^2$, un voisinage ouvert W de c dans $\mathbb{C}$ et une application f de classe C^p de V dans W tels que $g(x, y, f(x, y)) = 0$.*

Les dérivées partielles de f sont déterminées par les relations:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

et, en particulier, si $p \geq 1$, la fonction f est différentiable en $(x, y) \in V$ et l'on a:

$$df(x, y)(dx, dy) = g'_x(x, y, f(x, y))dx + g'_y(x, y, f(x, y))dy$$

Chapitre 4

Théorèmes d'existence

On a étudié au chapitre précédent, des équations différentielles de la forme, dite normale :

$$x' = f(t, x)$$

le couple (t, x) appartenant à un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E$. Nous avons admis un théorème que nous allons maintenant démontrer. L'espace de Banach E est le plus souvent de dimension finie ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) mais nous allons considérer un espace de Banach E sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ de dimension quelconque.

4.1 Définition des solutions approchées.

La notion de solution approchée d'une équation différentielle est fondamentale. On montrera que sous des conditions assez larges, il existe une suite de solutions approchées qui converge, avec une bonne topologie, vers une "vraie" solution (lorsque celle-ci existe) de l'équation différentielle. Ceci n'est possible que si l'on impose aux solutions approchées de satisfaire aux mêmes conditions initiales que la solution cherchée, ou à tout le moins, si v est la solution approchée, que la norme de la différence $\|v(t_0) - u_0\|$ ne soit "pas trop grande".

Définition 4.1.1 *(Solutions approchées) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on dit qu'une application v définie et continue sur un intervalle I non réduit à un point, dérivable sauf en un nombre au plus dénombrable de points, est une solution approchée à ε près de l'équation différentielle $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ si, en tout t de I pour lequel $\boldsymbol{v}$ est dérivable, on a :*

$$(t, \boldsymbol{v}(t)) \in I \times H, \quad et \quad \|\boldsymbol{v}'(t) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{v}(t))\| \leq \varepsilon.$$

Remarque : Si l'on sait trouver les "vraies" solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ et si, en tout point de D les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont continues et "voisines", c'est-à-dire qu'en tout point de D on ait :

$$\|\boldsymbol{f}(t, x) - \boldsymbol{g}(t, x)\| \leq \varepsilon$$

toute "vraie" solution de l'équation différentielle $x' = \boldsymbol{g}(t, x)$ est une solution approchée à ε près de l'équation $x' = \boldsymbol{f}(t, x)$.

4.2 Le cas où f est continue.

4.2.1 Construction d'une solution approchée. Méthode de Cauchy-Lipschitz.

Rien ne prouve qu'il existe des solutions approchées, on va donc commencer par donner un procédé de construction, valable sous certaines hypothèses, de solutions approchée et on le fera dans le cas de dimension

1. La généralisation au cas de dimension n est immédiate. L'équation différentielle considérée est donc une équation scalaire du premier ordre : $x' = f(t, x)$.

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et possédant les propriétés suivantes :

1. f est bornée dans $D = I \times H$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et H un ouvert de E (soit M un majorant : $\forall (t, x) \in D, |f(t, x)| \leq M$);
2. f est uniformément continue dans D (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $|t_2 - t_1| \leq \delta$ et $|x_2 - x_1| \leq \delta$ entrainent $|f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)| \leq \varepsilon$).

Remarques :

- 1. et 2. ne sont pas des conséquences de la continuité de f parce que D est un ouvert. Cependant, on peut vérifier que ces conditions sont vérifiées si f est continue sur D' ouvert et que $D \subset K \subset D'$ où K est un compact.
- Ces conditions sont satisfaites si D est convexe et si f admet des dérivées partielles en t et en x bornées et continues (appliquer le théorème des accroissements finis).

On fixe ε, on considére un point $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ appartenant à D et on introduit la fonction affine :

$$v_0 \ : t \longrightarrow \boldsymbol{x}_0 + (t - t_0).\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0)$$

Pour examiner si cette fonction v_0 est solution approchée dans l'intervalle $[t_0, t_1]$, on forme la différence :

$$|v_0'(t) - f(t, v_0(t))| = |f(t_0, x_0) - f(t, v_0(t))|$$

et on remarque que v_0 est bien une solution approchée à ε près sur $[t_0, t_1]$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- le point $(t, v_0(t))$ appartient à D pour tout t tel que $t_0 \leq t_1$.
- $t_1 - t_0 \leq \delta$
- $M|t_1 - t_0| \leq \delta$ (car alors $|x_0 - v_0(t)| = \|(t - t_0)f(t_0, x_0)\| \leq \delta$).

On choisit donc t_1 de manière que : $t_1 - t_0 \leq \inf(\delta, M/\delta)$

On se place alors au point (t_1, x_1), $x_1 = v_0(t_1)$, et l'on recommence. On définit ainsi une suite $(v_n)_{n \geq o}$ (éventuellement finie) de fonctions affines qui se "raccordent", et qui constituent, sous réserve que le point $(t, v_n(t))$ reste dans D, une solution approchée à ε prés de l'équation différentielle.

Il va nous être nécessaire de nous assurer que, pour une conditions initiales (t_0, x_0) donnée, toutes les sollutions approchées ainsi construites sont au moins définies sur un intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Pour cela, il suffit de remarquer que si l'on désigne par $(t, u(t))$ le point d'abscisse t de la solution approchée, on a: $|u(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$. Par conséquent, si le rectangle fermé $|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$ est contenu dans D, la solution approchée pourra certainement être construite dans l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$ où $h = inf(a, \dfrac{b}{M})$.

Des exemples montrent qu'il s'agit bien d'une limite inférieure et qu'il peut arriver que la construction puisse se poursuivre dans un intervalle plus grand.

4.2.2 Comparaison des solutions approchées.

Il est clair que la construction de solutions approchées n'a d'intérêt que si l'on est capable d'en construire une suite $(v_n)_{n \leq 0}$ qui convergerait avec une bonne topologie vers une "vraie" solution de l'équation différentielle. Il faut donc apprendre à comparer les solutions approchées.

Théorème 4.2.1 *Soit f une fonction continue et lipschizienne par rapport à la seconde variable pour la constante k dans l'ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$; soient u_1 et u_2 deux solutions approchées à ε_1 et ε_2 près respectivement, définies sur $I \subset \mathbb{R}$. Considérons $t_0 \in I$. Alors, pour tout $t \in I$, on a :*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| \, e^{k|t - t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \, \frac{e^{k|t - t_0|} - 1}{k} \tag{4.1}$$

La démonstration de cette relation est une application du "lemme de Gronwall" dont la démonstration se trouve en annexe, section4.5.1.

Lemme 4.2.1 *(Lemme de Gronwall) Si dans l'intervalle compact [t_0,t_1], k est une fonction réglée positive et si w est une fonction numérique continue satisfaisant à l'inégalité :*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} k(s).w(s))ds$$

on a, pour $t \in [t_0, t_1]$:

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s).k(s).exp\left(\int_{s}^{t} k(z).dz\right) ds$$

$\diamond$ Pour tout $t \in I$, on considère d'abord $t > t_0$, la démonstration est similaire si $t < t_0$.

On a : $\|u_1'(t) - f(t, u_1(t))\| \leq \varepsilon_1$ et $\|u_2'(t) - f(t, u_2(t))\| \leq \varepsilon_2$, donc par le théorème des accroissements finis :

$$\begin{cases} \|u_1(t) - u_1(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s))ds\| & \leq & \varepsilon_1(t - t_0) \\ \|u_2(t) - u_2(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u_2(s))ds\| & \leq & \varepsilon_1(t - t_0) \end{cases}$$

et donc

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\right) ds\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0)$$

D'après la conditions de Lipschitz, on a :

$$\left\|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\right) ds\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\| \, ds \leq k \int_{t_0}^{t} \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds$$

D'où, en posant $w(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|$,

$$w(t) \leq w(t_0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} kw(s)ds$$

On applique le lemme de Gronwall :

$$w(t) \leq w(t_0) + \varepsilon(t - t_0) + k \int_{t_0}^{t} (w(t_0) + \varepsilon(s - t_0))e^{k(t-s)}ds$$

$$\leq w(t_0) + \varepsilon(t - t_0) + [w(t_0)e^{k(t-t_0)} - w(t_0) + \varepsilon(t - t_0)] + \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(t-t_0)} - 1]$$

en intégrant par partie. Après simplifications, on obtient l'inégalité annoncée. $\diamond$

4.2.3 Existence et unicité - le cas des équations lipschitziennes

Ce qui précède montre qu'il existe et que l'on sait construire une solution approchée à ε près de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$, sous réserve que la fonction f soit continue et lipschizienne par rapport à la seconde variable pour la constante k dans l'ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$. On peut donc se demander si on ne pourrait pas construire une suite de solutions approchées qui convergerait vers une "vraie" solution. Désignons par J un intervalle dans lequel toutes les solutions approchées de conditions initiales (t_0, x_0) sont définies (voir section 4.2.1).

Théorème 4.2.2 *(théorème d'existence et d'unicité locale de Cauchy). Sous les hypothèses précédentes sur f, l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ admet sur J une solution $t \longrightarrow u(t)$ de conditions initiales (t_0, x_0) et cette solution est unique.*

◇ On considère alors la suite (u_n) où u_n une solution approchée à $\varepsilon/2^n$ près, définie dans J et telle que $u_n(t_0) = x_0$. Il résulte du théorème 4.2.1 que l'on a :

$$\forall t \in J, \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \frac{3\varepsilon}{2^{n+1}.k}(e^{k(t-t_0)} - 1)$$

La série de terme général $u_{n+1}(t) - u_n(t)$ est donc <u>normalement</u> convergente dans J ce qui entraine la convergence uniforme de la suite (u_n) dans J vers une fonction u telle que $u(t_0) = x_0$. De plus, on a :

$$|f(t, u(t)) - f(t, u_n(t))| \leq k|u(t) - u_n(t)|$$

pour tout $t \in J$. D'où :

$$\begin{aligned}\left|u(t) - u(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds\right| &\leq |u(t) - u_n(t)| + \left|u_n(t) - u_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds\right| \\ &\quad + \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))]\, ds\right| \\ &\leq |u(t) - u_n(t)| + \int_{t_0}^{t} |u_n'(s) - f(s, u_n(s))|\, ds + \int_{t_0}^{t} k.\, |u_n(s) - u(s)|\, ds\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout n, on démontre que u vérifie

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

c'est-à-dire que u est bien une solution de conditions initiales (t_0, x_0).

On démontre l'unicité de la solution en remarquant que si u_1 et u_2 sont deux solutions de conditions initiales (t_0, x_0), définies sur un intervalle J, elles vérifient l'inégalité 4.1 avec $\|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| = 0$ et ε_1 et ε_2 quelconques. Il suffit alors de faire tendre $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ vers 0 pour avoir $u_1 = u_2$ sur J. ◇

4.2.4 Le cas des équations localement lipschitziennes.

C'est de trés loin le cas que l'on rencontre le plus souvent. Il est souvent commode de choisir pour voisinage de (t_0, x_0) un carré fermé :

$$C_{(t_0,x_0)} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a(t_0, x_0) \ \ |x - x_0| \leq a(t_0, x_0)\} \subset D$$

La restriction de f au compact $C_{(t_0,x_0)}$ est bornée et uniformément continue. Il existe donc une unique solution de l'équation différentielle de conditions initiales (t_0, x_0) dans un intervalle ouvert $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ et cette solution est unique.

4.3 Le cas où f est réglée.

On considérera l'équation différentielle

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

dans le cadre suivant :

- I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,
- E est un $\mathbb{C}$-espace de Banach de dimension quelconque,
- H est une partie ouverte de E,
- $\boldsymbol{f}$ une application de $I \times H$ dans E telle que, pour tout $\boldsymbol{x} \in H$, en désignant par $\boldsymbol{f}_x$ l'application $t \rightarrow \boldsymbol{f}_x(t) = \boldsymbol{f}(t, x)$ de I dans E, telle que les conditions suivantes soient réalisées :

  A) Pour tout $x \in H$, $\boldsymbol{f}_x : I \rightarrow E$ est réglée dans I;

  B) l'application $x \rightarrow \boldsymbol{f}_x$ de H dans l'espace $\mathcal{F}_c(I, E)$ des applications de I dans E (muni de la topologie de la convergence compacte) est continue.

Dans toute la suite du chapitre et sauf indications contraires, nous supposerons que ces hypothèses sont vérifiées.

On notera que si la fonction $\boldsymbol{f} : I \times H \rightarrow E$ est continue, elle satisfait aux conditions **A)** et **B)**.

4.3.1 Propriétés des solutions d'une telle équation.

Nous élargirons de la façon suivante la notion de solution d'une telle équation différentielle.

Définition 4.3.1 *Une fonction $\boldsymbol{u}$ définie et continue dans un intervalle $J \subset I$, à valeurs dans H, est une solution (ou intégrale) de l'équation* (4.2) *s'il existe une partie finie ou dénombrable A de I telle qu'en tout point t du complémentaire de A par rapport à I, $\boldsymbol{u}$ admette une dérivée $\boldsymbol{u}'(t)$ telle que :*

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$$

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses précédentes :*

1. *pour toute application continue $\boldsymbol{u}$ de I dans H, la fonction $t \longrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ est réglée dans I;*
2. *si $(\boldsymbol{u}_n)_{n \geq o}$ est une suite d'applications de I dans H qui converge uniformément dans toute partie compacte K de I vers une application continue $\boldsymbol{u}$ de I dans H, la suite des fonctions $(\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}_n(t)))_{n \geq o}$ converge uniformément sur K vers $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$.*

◇ 1. Soit $\boldsymbol{c}$ la limite à droite de $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t_0))$, on a :

$$||\boldsymbol{f}(t, u(t)) - \boldsymbol{c}|| \leq ||\boldsymbol{f}(t, u(t)) - \boldsymbol{f}(t, u(t_0))|| + ||\boldsymbol{f}(t, u(t_0)) - \boldsymbol{c}||$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact V de t_0 dans I tel que l'on ait $||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t_0)) - \boldsymbol{c}|| \leq \varepsilon$ pour $t \in V$ et $t > t_0$. D'autre part, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $x \in H$ et $||x - u(t_0)|| \leq \delta$ entrainent $||f(s, x) - f(s, u(t_0))|| \leq \delta$ pour tout $s \in V$; si $W \subset V$ est un voisinage de t_0 dans I tel que l'on ait $||u(t) - u(t_0)|| \leq \delta$ pour tout $t \in W$, on aura donc : $||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t)) - \boldsymbol{c}|| \leq 2\varepsilon$ pour $t \in W$ et $t \geq t_0$.

2. Soit K une partie compacte de I; on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $t \in K$,

$$||f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))|| < \varepsilon.$$

D'après **B)**, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{u}(K)$, il existe un nombre δ_x tel que pour $y \in H$ tel que $||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| \leq \delta_x$ et pour tout $t \in K$, on ait $||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})|| \leq \varepsilon$.

De plus, $\boldsymbol{u}$ est continue dans I, donc $\boldsymbol{u}(K)$ est une partie compacte de H. Donc, il existe un nombre fini de points $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{u}(K)$ tels que les boules fermées de centre $\boldsymbol{x}_i$ et de rayon $\frac{1}{2}.\delta_{x i}$ forment un recouvrement de $\boldsymbol{u}(K)$.

Soit $\delta = \inf(\delta_{x_i})$, par convergence uniforme de la suite (u_n), il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $||\boldsymbol{u}_n(t) - \boldsymbol{u}(t)|| \leq \frac{1}{2}.\delta$ pour tout $t \in K$.

Or, pour $t \in K$, il existe un entier i tel que $||\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{x}_i|| \leq \frac{1}{2}\delta_{x_i}$. Par suite, on a : $||\boldsymbol{u}_n(t) - \boldsymbol{x}_i|| \leq \delta_{x i}$, d'où $||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}_n(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))|| \leq 2\varepsilon$ pour tout $t \in K$ et tout $n \geq n_0$.

◇

Théorème 4.3.2 *Soit t_0 un point de I, $\boldsymbol{x}_0$ un point de H; pour qu'une fonction continue $\boldsymbol{u}$ soit une solution de l'équation (4.2) dans I de conditions initiales $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, il faut et suffit qu'elle vérifie la relation :*

$$\forall t \in I, \boldsymbol{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \boldsymbol{u}(s)))ds \tag{4.3}$$

◇ En effet, si $\boldsymbol{u}$ est solution de (4.2) dans I, $t \longrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ est réglée, donc le second membre de (4.3) est défini et égal à $\boldsymbol{u}(t)$ pour tout $t \in I$. Réciproquement, si $\boldsymbol{u}$ est une fonction continue satisfaisant à (4.3), $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ est réglée, donc $\boldsymbol{u}$ a pour dérivée $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ sauf aux points d'une partie finie ou dénombrable A de I. ◇

Corolaire 4.3.1 *En tout point de I distinct de l'origine (resp. de l'extrémité) de cet intervalle, toute solution $\boldsymbol{u}$ de (4.2) dans I admet une dérivée à gauche (resp. à droite) égale à la limite à gauche (resp. à droite) de la fonction $t \longrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ en ce point.*

Théorème 4.3.3 *Si $\boldsymbol{f}$ est une application continue de $I \times H$ dans E, toute solution de l'équation (4.2) dans I est une solution stricte (c'est-à-dire en tous les points de I).*

◇ En effet, une telle solution $\boldsymbol{u}$ est primitive de la fonction continue $t \longrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$. ◇

4.3.2 Existence des solutions approchées.

Soit $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ un point de $I \times H$; il existe un voisinage compact J de t_0 dans I. Pour un tel voisinage et d'après **A)**, l'application $t \rightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0)$ est bornée dans J (cf annexe). D'autre part, d'après **B)**, on peut choisir r tel que $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0)\|$ soit bornée dans $J \times B_0$ où $B_0 = B(\boldsymbol{x}_0; r)$ est la boule ouverte de centre $\boldsymbol{x}_0$, de rayon $r > 0$. On choisit de plus r de manière que B_0 soit de plus contenue dans H. Il en résulte que $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ est bornée dans $J \times B_0$. On désignera par M la borne supérieure de $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\|$ dans $J \times B_0$.

Théorème 4.3.4 *Dans tout intervalle compact d'origine ou d'extrémité t_0 contenu dans J et de longueur strictement inférieure à $\dfrac{r}{M+\varepsilon}$, il existe une solution approchée à ε prés de l'équation (4.2) à valeurs dans B_0.*

◇ On fait la démonstration en se plaçant dans le cas où t_0 n'est pas l'extrémité droite de J et en se plaçant dans les intervalles d'origine t_0.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des solutions approchées à ε prés de l'équation (4.2) à valeurs dans B_0 et de conditions initiales (t_0, x_0), définies dans un intervalle semi-ouvert $[t_0, b[$ contenu dans J (b dépendant de la solution approchée que l'on considére).

Montrons que $\mathcal{M}$ n'est pas vide: soit $\boldsymbol{c}$ la limite à droite de $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0)$ au point t_0; d'aprés le théoréme (4.3.1), la fonction $t \rightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}(t - t_0))$ a une limite à droite égale à $\boldsymbol{c}$ au point t_0 donc la restriction de la fonction affine $t \rightarrow \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}(t - t_0)$ à un intervalle semi-ouvert $[t_0, b[$, assez petit, appartient à $\mathcal{M}$.

Ordonnons l'ensemble $\mathcal{M}$ par la relation "$\boldsymbol{u}$ est restriction de $\boldsymbol{v}$" et montrons que $\mathcal{M}$ est inductif (toute partie totalement ordonnée a une borne supérieure élément de $\mathcal{M}$, cf annexe). Soit $\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ et soit $[t_0, b_\alpha[$ l'intervalle où $\boldsymbol{u}_\alpha$ est définie; pour $b_\alpha \leq b_\beta$, $\boldsymbol{u}_\beta$ est donc un prolongement de $\boldsymbol{u}_\alpha$. La réunion des intervalles $[t_0, b_\alpha[$ est un intervalle $[t_0, b[$ contenu dans J, et il existe une fonction et une seule $\boldsymbol{u}_0$ définie dans $[t_0, b[$ et coincidant avec $\boldsymbol{u}_\alpha$ dans $[t_0, b_\alpha[$ pour tout α ; parmi les b_α, il existe une suite croissante $(b_{\alpha_n})_{n \geq o}$ tendant vers b. Comme $\boldsymbol{u}$ coincide avec $\boldsymbol{u}_{\alpha_n}$ dans $[t_0, b_{\alpha_n}[$, $\boldsymbol{u}$ admet, en tous les points du complémentaire par rapport à $[t_0, b[$ d'un ensemble fini ou dénombrable A , une dérivée $\boldsymbol{u}'$ vérifiant l'inégalité:

$$\|\boldsymbol{u}'(t) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \varepsilon \Longrightarrow \|\boldsymbol{u}'(t)\| \leq M + \varepsilon$$

Par conséquent, $\boldsymbol{u}$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{\boldsymbol{u}_\alpha\}$ de $\mathcal{M}$. D'aprés le théoréme de Zorn (cf. annexe), $\mathcal{M}$ admet un élément maximal $\boldsymbol{u}_0$; nous allons montrer que si $[t_0, t_1[$ est l'intervalle où est définie $\boldsymbol{u}_0$, ou bien t_1 est l'extrémité droite de J, ou bien $t_1 - t_0 \geq \dfrac{r}{M+\varepsilon}$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'aucune de ces deux hypothéses ne soit vérifiée; montrons que l'on peut prolonger par continuité $\boldsymbol{u}_0$ à t_1. En effet, quels que soient s et t dans $[t_0, t_1[$, en appliquant le théoréme des accroissements finis, on a:

$$\|\boldsymbol{u}_0(s) - \boldsymbol{u}_0(t)\| \leq (M + \varepsilon)|s - t|$$

Le critére de Cauchy montre donc que $\boldsymbol{u}_0$ admet une limite à gauche $\boldsymbol{x}_1 \in B_0$ au point t_1. Soit alors $\boldsymbol{c}_1$ la limite à droite au point t_1 de la fonction $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1)$; on a $\|\boldsymbol{c}_1\| \leq M$; le début de la démonstration montre que l'on peut prolonger $\boldsymbol{u}_0$ dans un intervalle semi-ouvert d'origine t_1, par la fonction $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_1(t - t_1)$ de sorte que la fonction prolongée appartienne encore à $\mathcal{M}$, ce qui est absurde. ◇

4.3.3 Premier théoréme d'existence - Dimension finie.

Toutes les solutions approchées d'une équation différentielle ont une propriété fondamentale:

Théorème 4.3.5 *L'ensemble $\mathcal{S}_A$ des solutions approchées à ε prés de l'équation différentielle $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ définies dans un intervalle compact $[a, b] \subset J$ et prenant leur valeurs dans B_0 est uniformément équicontinu.*

◇ Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction quelconque appartenant à cet ensemble. Quelle que soit la façon dont cette solution approchée à ε prés a été construite, on a, quel que soit t dans $[a, b]$:

$$\|\boldsymbol{u}'(t) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \varepsilon$$

et, par conséquent, on a :

$$\sup_{t \in [a,b]-A} \|\boldsymbol{u}'(t)\| \leq (M + \varepsilon)$$

et en appliquant le théoréme des accroissements finis (cf. section 4.5.3), on obtient, quels que soient t_1 et t_2 dans $[a, b] - A$, où A est un ensemble dénombrable, l'inégalité :

$$\|\boldsymbol{u}(t_1) - \boldsymbol{u}(t_2)\| \leq (M + \varepsilon)|t_1 - t_2|$$

d'où l'équicontinuité. ◇

Théorème 4.3.6 *(théoréme de Peano)- Si E est un $\mathbb{R}$-espace de Banach de dimension finie, dans tout intervalle compact $[t_0, b]$ (resp. $[a, t_0]$) contenu dans J et de longueur strictement inférieure à $\frac{r}{M}$, il existe une solution de l'équation $\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x})$ à valeurs dans la boule ouverte $B_0(\boldsymbol{x}_0, r)$, égale à $\boldsymbol{x}_0$ au point t_0.*

◇ D'après le théorème 4.3.4, pour n assez grand (de manière à ce que $(b - t_0) < \dfrac{r}{M + 1/n}$), il existe une solution approchée $\boldsymbol{u}_n$ à $1/n$ prés, définie dans $[t_0, b]$ à valeurs dans $B_0 = B_0(\boldsymbol{x}_0, r)$ qui est une boule ouverte. L'adhérence $\overline{B_0}$ de B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, et, en dimension finie, c'est une partie compacte de E.

L'ensemble $(\boldsymbol{u}_n)_{n \geq 1}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{C}_u([t_0, b], \overline{B_0})$; c'est donc une partie relativement compacte de $\mathcal{C}_u([t_0, b], \overline{B_0})$. Il existe donc une suite $\boldsymbol{u}_{n_k}$, $(k \geq 1)$ extraite de la suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n \geq 1}$ et qui converge uniformément vers une fonction continue $\boldsymbol{u}$ définie sur $[t_0, b]$ à valeurs dans $\overline{B_0}$. D'aprés le théoréme 4.3.1, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}_{n_k}(t))$ tend uniformément vers $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ dans $[t_0, b]$; on a donc, à partir d'un certain rang, l'inégalité :

$$\|\boldsymbol{u}'_{n_k}(t) - f(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \|\boldsymbol{u}'_{n_k}(t) - f(t, \boldsymbol{u}_{n_k}(t))\| + \|f(t, \boldsymbol{u}_{n_k}(t)) - f(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \frac{1}{n_k} + \varepsilon$$

ce qui montre que $\boldsymbol{u}'_{n_k}$ converge uniformément vers l'application $t \longrightarrow f(t, \boldsymbol{u}(t))$ et que donc $\boldsymbol{u}$ est solution de l'équation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ dans $[t_0, b]$. D'autre part, la relation $\|\boldsymbol{u}'(t)\| \leq (M + 1/n)$ entraine que, pour tout $t \in [t_0, b]$, $\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{x}_0\| \leq (M + 1/n)|t - t_0| \leq (M + 1/n)(b - t_0) < r$ et donc que $\boldsymbol{u}(t)$ appartient à B_0. ◇

On notera que la démonstration repose en grande partie sur la compacité, en dimension finie, de la boule fermée $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq r$. Il existe des exemples montrant que le théoréme de Peano ne s'applique pas en dimension infinie.

Ceci explique pourquoi, en dimension finie et, par conséquent, dans le cas des équations scalaires, du moment que la fonction $\boldsymbol{f}$ a des propriétés raisonnables, il existe une ou des solutions vérifiant la condition initiale $\boldsymbol{x}(u_0) = \boldsymbol{u}_0$.

4.3.4 Deuxième théorème d'existence et d'unicité - fonctions lipschitziennes.

On se propose, dans un premier temps, de comparer deux solutions approchées.

Théorème 4.3.7 *Soient k une fonction numérique réglée strictement positive dans I, et $\boldsymbol{f}$ une fonction définie et lipschitzienne par rapport à la seconde variable pour la fonction k dans $I \times H$. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux solutions approchées de l'équation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ à ε_1 et ε_2 près respectivement, ces solutions étant définies dans I et prenant leurs valeurs dans H, on a, pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$:*

$$\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)\| \leq \|\boldsymbol{u}(t_0) - \boldsymbol{v}(t_0)\|\Phi(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Psi(t)$$

avec :

$$\Phi(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} k(s)exp\left(\int_{s}^{t} k(\tau)d\tau\right) ds$$

$$\Psi(t) = t - t_0 + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)k(s)exp\left(\int_{s}^{t} k(\tau)d\tau\right) ds$$

◇ La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.2.1 mis à part le fait que la fonction k n'est plus constante, mais surtout par le fait que l'on travaille maintenant avec des fonctions $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ qui sont dérivables sauf en un nombre au plus dénombrable de points et que donc, en particulier le théorème des acroissements finis doit être énoncé dans ce cadre (voir la section 4.5.3). ◇

On en déduit le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 4.3.8 *(théoréme de Cauchy-Lipschitz). Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction k-lipschitzienne dans $I \times H$, J un intervalle compact contenu dans I et non réduit à un point, t_0 un point de J, $B_0 = B(\boldsymbol{x}_0; r)$, contenue dans H, M la borne supérieure de $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\|$ dans $J \times B_0$. Dans ces conditions, pour tout intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, contenu dans l'intersection de J et de $]t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}[$ et contenant t_0, il existe une solution et une seule de l'équation différentielle $\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x})$ définie dans $[a, b]$ à valeurs dans B_0 et égale à x_0 au point t_0.*

◇ En effet, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des solutions approchées de l'équation différentielle $\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x})$ à $1/n$ prés, définies dans $[a, b]$, à valeurs dans la boule ouverte $B_0 = B(\boldsymbol{x}_0; r)$, prenant la valeur $\boldsymbol{x}_0$ au point t_0, n'est pas vide en vertu du théorème 4.3.4.

Pour chaque entier n, on choisit un $\boldsymbol{u}_n \in \mathcal{S}_n$, et si $p \geq n$, d'aprés le corollaire 4.3.7, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\|\boldsymbol{u}_n(t) - \boldsymbol{u}_p(t)\| \leq 2\,\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{kn} \leq 2 \sup_{t \in [a,b]} \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{kn}$$

Donc la suite $(\boldsymbol{u}_n)$ converge uniformément dans $[a, b]$ vers une fonction que l'on note $\boldsymbol{u}$, égale à $\boldsymbol{x}_0$ au point t_0.

D'après le théorème 4.3.1, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}_n(t))$ tend uniformément vers $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$, on peut alors reprendre la démonstration précédente à partir de là :

$$\|\boldsymbol{u}_n'(t) - f(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \|\boldsymbol{u}_n'(t) - f(t, \boldsymbol{u}_n(t))\| + \|f(t, \boldsymbol{u}_n(t)) - f(t, \boldsymbol{u}(t))\| \leq \frac{1}{n} + \varepsilon$$

et donc $\boldsymbol{u}$ est solution de l'équation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ dans $[a, b]$. Le fait que $\boldsymbol{u}$ soit à valeurs dans B_0 se déduit directement de l'inégalité $\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{x}_0\| \leq M|t - t_0| < r$.

L'unicité de la solution découle enfin de l'inégalité :

$$\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)\| \leq \|\boldsymbol{u}(t_0) - \boldsymbol{v}(t_0)\|\; e^{k|t-t_0|} + 2\varepsilon\,\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \leq 2\varepsilon \sup_{t \in [a,b]} \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

◇

Corolaire 4.3.2 *Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction localement lipschitzienne dans $I \times H$, pour tout $t_0 \in I$ et pour $\boldsymbol{x}_0 \in H$, il existe un voisinage de t_0 dans lequel il existe une solution unique de l'équation $y' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$.*

4.4 Intégrales maximales.

Théorème 4.4.1 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point, contenant t_0, H une partie ouverte non vide de E, f une fonction localement lipschitzienne en $\boldsymbol{x}$, dans $I \times H$. Pour tout $\boldsymbol{x}_0 \in H$, il existe un plus grand intervalle ouvert $\tilde{J} \subset I$, contenant t_0, sur lequel il existe une intégrale $\boldsymbol{u}$ de l'équation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ prenant ses valeurs dans H, de conditions initiales (t_0, x_0). Cette intégrale est unique. On appelle une telle intégrale l'intégrale maximale de conditions initiales $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ de l'équation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$.*

◇ Nous commencons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, soient (J_i, u_i), $i = (1, 2)$, deux solutions de mêmes conditions initiales (t_0, x_0), ces deux solutions u_i coincident sur l'intervalle ouvert $J_1 \cap J_2$*

◇ Raisonnons par l'absurde et supposons que les deux solutions ne soient pas égales sur l'intervalle ouvert $J_1 \cap J_2$. Soit $\beta = \sup\{s \leq t \mid u_1(s) = u_2(s)\}$, β appartient à $J_1 \cap J_2$ (sinon on considére la borne inférieure et dans les cas où les deux sont égales aux bornes de J_1 et J_2, il n'y aurait plus rien à démontrer). La continuité de u_1 et de u_2 entraine l'égalité $u_1(\beta) = u_2(\beta)$. Mais alors, le théorème d'unicité locale montre qu'il y aurait une solution définie dans un intervalle ouvert de centre β dans lequel on aurait encore $u_1(t) = u_2(t)$, ce qui est en contradiction avec la définition de β.

Donc $u_1 = u_2$ dans l'ouvert $J_1 \cap J_2$. ◇

Revenons maintenant sur la démonstration du théorème. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des paires $(I, \boldsymbol{u})$ telles que :

1. J est un sous-intervalle de I non réduits à un point et contenant t_0
2. $\boldsymbol{u}$ est une solution de $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ de conditions initiales $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ définie sur J..

D'aprés le théoréme 4.3.8, $\mathcal{I}$ n'est pas vide. Posons

$$\tilde{J} = \cup_{(J,u)\in\mathcal{I}} J$$

et définissons l'application $\tilde{\boldsymbol{u}} : \tilde{J} \longrightarrow H$ de la façon suivante : pour tout $t \in \tilde{J}$, soit $(J, \boldsymbol{u})$ tel que $t \in J$, on pose $\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t)$. D'après le lemme précédent, cette définition ne dépend pas du couple (J, u) considéré et d'autre part, $(\tilde{J}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ est clairement solution de l'équation différentielle. D'autre part, $\tilde{J}$ étant une réunion d'intervalles ouverts contenant t_0 est aussi un intervalle ouvert contenant t_0.

L'unicité provient directement du lemme.

◇

Définition 4.4.1 *Soit $(\tilde{J}, \tilde{\boldsymbol{u}})$ une solution maximale. L'intervalle $\tilde{J}$ est de l'une des trois formes suivantes: $(\infty, +\infty)$, $]\alpha, +\infty)$, $]\alpha, \beta[$, $(-\infty, \beta[$. Nous noterons $\tilde{J} =]\alpha, \beta[$, α et β pouvant être infinis.*

Désignons par t^* l'une de ces quantités (y compris lorsqu'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$) et considérons, lorsqu'elles sont définies, les quantités $\tilde{\boldsymbol{u}}(t^*)$. Les points $(t^*, \tilde{\boldsymbol{u}}(t^*))$ s'appellent les "bouts" de la solution maximale $(\tilde{J}, \tilde{\boldsymbol{u}})$.

Théorème 4.4.2 *On suppose que l'application f est localement lipschitzien dans $\Omega = I \times H$. On est nécessairement dans l'un des cas suivants :*

a) *L'intégrale $\int_{t_0}^{\beta} f(s, u(s)).ds$ est divergente et par conséquent, la fonction $t \rightarrow u(t)$ ne tend vers aucune limite finie;*

b) *L'intégrale $\int_{t_0}^{\beta} f(s, u(s)).ds$ est convergente et par conséquent, la fonction u_0 a une limite à gauche finie $u(\beta-)$.*

◇ C'est évident à partir de l'égalité :

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)).ds$$

◇

Les bouts d'une solution maximale ont une relation étroite avec la frontière de Ω[1]

Corolaire 4.4.1 *Dans le cas **b)**, le bout $(\beta, \tilde{\boldsymbol{u}}(\beta-))$ appartient à la frontière de Ω*

Corolaire 4.4.2 *Les hypothéses sur f restant les mêmes et si, en plus, on suppose que f est bornée sur Ω, on a ou bien $\beta = +\infty$, ou bien β est fini et le point $(\beta, \tilde{\boldsymbol{u}}(\beta))$ est un point frontière de Ω.*

Corolaire 4.4.3 *Si $H = E$ et si $\boldsymbol{f}$ est lipschitzienne pour une fonction réglée k dans $I \times E$, on a $J = I$.*

---

[1] Un point appartient à la frontière de Ω s'il est adhérent à Ω et au complémentaire de Ω.

◇ On va effectuer une démonstration par l'absurde : supposons que $(J, \boldsymbol{u})$ soit une solution maximale et que $J =]\alpha, \beta[$ avec $\beta \in I$. Alors, il existe un voisinage compact V de β dans I tel que $t \longrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_0)$ et $t \longrightarrow k(t)$ soient bornées dans V.

On a donc dans V: $||f(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{x}_o)|| \leq k(t).||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o||$. Soit m la borne supérieure de $k(t)$ dans V. On a donc dans $V \times H$:

$$||f(t, \boldsymbol{x})|| \leq ||f(t, \boldsymbol{x}_o)|| + m.||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o|| \leq ||f(t, \boldsymbol{x}_o)|| + m.||\boldsymbol{x}_o|| + m.||\boldsymbol{x}|| = m.||\boldsymbol{x}|| + h$$

où m et h sont des constantes positives. D'où, dans le complémentaire d'une partie finie ou dénombrable de $V \cap J$:

$$||\boldsymbol{u}'(t)|| \leq m.||\boldsymbol{u}(t)|| + h$$

et, par suite, dans $V \cap J$:

$$||\boldsymbol{u}(t)|| \leq m.\int_{t_o}^{t} ||\boldsymbol{u}(s)||.ds + q$$

(q constante).

Le lemme de Gronwall montre que l'on a:

$$||\boldsymbol{u}(t)|| \leq c.e^{mt}$$

(c constante) dans $V \cap J$, et, par conséquent, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$ reste bornée dans $V \cap J$. On obtient $||\boldsymbol{u}'(t)|| \leq M$ dans $V \cap J$, ce qui implique que $||\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{u}(t)|| \leq M|s - t|$ et donc (suite de cauchy) l'existence d'une limite à gauche en β appartenant à $H = E$. On aurait donc un bout $(\beta, \boldsymbol{u}(\beta-)) \in I \times H$ ce qui est impossible car le théorème de Cauchy prouve qu'alors on peut prolonger cette solution ce qui contredit l'hypothèse que $(J, \boldsymbol{u})$ est une solution maximale. ◇

4.5 Annexe B :

4.5.1 Démonstration du Lemme de Gronwall

On démontrera ce lemme dans un contexte un peu plus général de celui décrit précédemment. On supposera que la fonction φ est une fonction réglée, car on utilisera plus loin ce lemme alors que la fonction φ sera réglée.

Lemme 4.5.1 *Si dans l'intervalle compact $[t_0,t_1]$, k est une fonction réglée positive et si w est une fonction numérique continue satisfaisant à l'inégalité :*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} k(s).w(s)ds$$

on a, pour $t \in [t_1,t_2]$:

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s).k(s).exp\left(\int_{s}^{t} k(z).dz\right) ds$$

◇ Posons $y(t) = \int_{t_0}^{t} k(s).w(s)ds$; la relation : $w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} k(s).w(s)ds$ s'écrit, en multipliant les deux membres par $k(t)$, qui est ≥ 0,

$$k(t).w(t) \leq k(t).\varphi(t) + k(t).\int_{t_0}^{t} k(s).w(s)ds$$

ou, dans le complémentaire d'une partie finie ou dénombrable A de I :

$$y'(t) - k(t).y(t) \leq \varphi(t).k(t)$$

Et en posant : $z(t) = y(t).exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)ds)$, cette inégalité devient :

$$z'(t) \leq k(t)\varphi(t).exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s))ds\right)$$

Puis en intégrant les deux membres entre t_0 et t et en remarquant que $z(t_0) = 0$:

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} k(s).\varphi(s)exp\left(-\int_{t_0}^{s} k(\tau)d\tau.\right) ds$$

$$z(t).exp\left(\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau\right) = y(t) \leq \int_{t_0}^{t} k(s).\varphi(s).exp\left(\int_{s}^{t} k(\tau)d\tau\right) ds$$

et, comme $w(t) \leq \varphi(t) + y(t)$, on obtient :

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s).k(s).exp\left(\int_{s}^{t} k(z)dz)\right) ds$$

◇

4.5.2 Les fonctions réglées.

Définition 4.5.1 *On dit qu'une application f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble E est une fonction en escalier s'il existe une partition de I en un nombre fini d'intervalles J_k telle que f soit constante dans chacun des J_k.*

Théorème 4.5.1 *L'ensemble $\mathcal{E}(I,E)$ des fonctions en escalier définies sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel E, est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I,E)$ de toutes les applications de I dans E.*

Définition 4.5.2 *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I, à valeurs dans un espace de Banach réél E est réglée, si elle a, en tout point intérieur à I, une limite à gauche et une limite à droite, une limite à droite à l'origine de I, une limite à gauche extrémité de I lorsque ces points appartiennent à I.*

Remarque : Evidemment, les fonctions continues sur un intervalle I sont réglées.

Théorème 4.5.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie dans un intervalle I, à valeurs dans un espace de Banach réél E soit une fonction réglée est que, dans toute partie compacte de I, elle soit limite uniforme de fonctions en escalier.*

Corolaire 4.5.1 *Si f est réglée dans I, l'ensemble de ses points de discontinuité est dénombrable.*

Corolaire 4.5.2 *Si f est réglée dans I, elle est bornée sur tout compact de I.*

Corolaire 4.5.3 *Toute fonction réglée dans un intervalle I admet une primitive.*

Remarque : Une fonction réglée dans un intervalle I est par construction (Rieman) intégrable.

Théorème 4.5.3 *Soit $\mathcal{R}(R, E)$ l'espace vectoriel des fonctions réglées à valeurs dans un espace de Banach E réél. L'espace $\mathcal{R}(R, E)$ est un espace de Banach réél.*

4.5.3 Le théoréme des accroissements finis.

Théorème 4.5.4 *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé; soit g une fonction numérique continue et croissante sur $[a, b]$. On suppose que f et g admettent une dérivée à droite en tous les points du complémentaire par rapport à $[a, b[$ d'une partie dénombrable A de cet intervalle (notées f'_d et g'_d), et qu'en chacun de ces points on a:*

$$||f'_d(x)|| \leq g'_d(x)$$

Dans ces conditions, on a:

$$||f(b) - f(a)|| \leq g(b) - g(a)$$

◇ Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire et $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite obtenue en rangeant dans un certain ordre les points de A. Soit J l'ensemble des points $y \in I$ tels que, pour tout x tel que $a \leq x \leq y$, on ait:

$$||f(x) - f(a)|| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon.(x - a) + \varepsilon. \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n} \tag{4.4}$$

Nous allons montrer que J=I. Pour cela, nous allons démontrer :

1. $J = [a, c]$;
2. $J = [a, b]$;
3. Poser $x = b$ et faire tendre ε vers 0.

1. L'ensemble J n'est pas vide puisqu'il contient a; d'autre part si $y \in J$, on a $x \in I$ pour tout x tel que $a \leq x \leq y$; par conséquent, J est un intervalle d'origine a. Soit c son extrémité, on a $c \in J$: c'est évident si $c = a$, sinon, pour tout $x < c$, on a l'inégalité 4.4 et a fortiori

$$||f(x) - f(a)|| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon.(c - a) + \varepsilon. \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n}$$

et en faisant tendre x vers c dans cette inégalité, il résulte, en raison de la continuité de f, que c satisfait l'inégalité 4.4.

2. Supposons $c < b$:
   (a) supposons d'abord que $c \notin A$ $f'_d(c)$ et $g'_d(c)$ existent donc et l'on a: $\|f'_d(c)\| \leq g'_d(c)$ ou encore $f'_d(c) = \boldsymbol{u}.g'_d(c)$, avec $\|\boldsymbol{u}\| \leq 1$;
   la fonction $f(x) - \boldsymbol{u}.g(x)$ ayant au point c une dérivée à droite nulle, par définition de la dérivée à droite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]c, c+\eta[$:
   $$\|f(x) - f(c) - \boldsymbol{u}(g(x) - g(c))\| \leq \varepsilon.(x-c)$$
   $$\text{d'où } \|f(x) - f(c)\| \leq \|\boldsymbol{u}(g(x) - g(c))\| + \varepsilon.(x-c) = (g(x) - g(c)) + \varepsilon.(x-c)$$
   $$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq (g(x) - g(c)) + \varepsilon.(x-c) + g(c) - g(a) + \varepsilon.(c-a)\varepsilon. \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n} \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon.(x-a) + \varepsilon. \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$
   ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de J.
   (b) supposons que $c = a_k$ pour un indice k. Comme f est continue au point a_k, il existe un y tel que $c < y \leq b$ et que pour $c < x \leq y$, on ait: $\|f(x) - f(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$, d'où :
   $$\|f(x) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon.(c-a) + \varepsilon. \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n} \leq g(x) - g(a) + \varepsilon.(x-a) + \varepsilon. \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n}$$
   ce qui entraine de nouveau une contradiction.
3. On a donc bien $c = b$ et, par suite:
   $$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon.(b-a) + \varepsilon. \sum_{a_n<b} \frac{1}{2^n} \leq g(b) - g(a) + \varepsilon.(b-a) + 2\varepsilon.$$
   Le nombre $\varepsilon > 0$ étant aussi petit que l'on veut, on a
   $$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

◇

4.5.4 Définition de la topologie de la convergence uniforme compacte.

Soit X un espace topologique et soit (Y, d_Y) un espace métrique. On peut introduire la partie $\mathcal{C}_u(X,Y)$ de $\mathcal{F}_u(X,Y)$ dont les éléments sont les applications continues de X dans Y. On va définir sur cet espace la "topologie de la convergence uniforme compacte" (ou la "topologie de la convergence uniforme sur tout compact") et cet espace topologique sera noté $\mathcal{C}_c(X,Y)$.

Pour ce faire, on définit la famille suivante de distances : pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}_u(X,Y)$ et pour toute partie compacte K de X, on pose: $\delta_K(f,g) = \sup_{x\in K} d_Y(f(x), g(x))$. On remarque que la continuité de f et la compacité de K implique que $\delta_K(f)$ est bornée (les autres vérifications sont immédiates).

Rappelons comment on définit la topologie associée à cette famille $\varepsilon = (\Delta_K)_{K\in T}$, T désignant l'ensemble des parties compactes de X. Désignons par $B_K(f_0, r)$ la δ_K- boule ouverte de centre f_0 et de rayonrt $r > 0$, donc l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_u(X,E)$ tels que $\delta_K(f, f_0) < r$. On appelle ε-boule ouverte de centre f_0 toute intersection finie de δ_K-boules ouvertes de centre f_0 et de rayon quelconque (une ε-boule n'a pas de rayon).

4.5.5 Le théorème de Zorn.

On considére un ensemble $\mathcal{S}$ ordonné (il s'agit en général d'un ordre partiel); on note $\leq$ la relation d'ordre définie sur $\mathcal{S}$ et si l'on écrit $x \leq y$ cela signifie d'abord, que x et y sont comparables par la relation $\leq$, et que l'on a : $x \leq y$. Rappelons les définitions suivantes :

- Une partie $T \subset \mathcal{S}$ est dite totalement ordonnée si pour tout couple (x,y) d'éléments de T, l'assertion : $x \leq y$ ou $y \leq x$ est vraie.

- Un élément m appartenant à $\mathcal{S}$ est dit maximal si l'inégalité $m \leq x$ implique $x = m$.
- Soit $\mathcal{S}_1$ une partie de $\mathcal{S}$. Un élément z, appartenant à S , est appelé borne supérieure de S_1, si pour tout élément x appartenant à S_1, on a $x \leq z$.
- Un ensemble ordonné $\mathcal{S}$ est dit inductif si toute partie totalement ordonnée $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ a une borne supérieure élément de $\mathcal{S}$.

Théorème 4.5.5 *(Théoréme de Zorn.) Tout ensemble ordonné inductif a un élément maximal.*

4.5.6 Equicontinuité et Théorème d'Ascoli

Définition 4.5.3 *(d'une partie équicontinue). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit E une partie non vide de $\mathcal{F}(X,Y)$, ensemble des applications de X dans Y. On dit que la partie E est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $f \in E$ et pour tout couple $(x_1, x_2) \in X \times X$, l'inégalité $d_X(x_1, x_2) \leq \eta$ implique $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$.*

Théorème 4.5.6 *(Théoréme d'Ascoli) Soient X et Y deux espaces métriques compacts et soit E une partie non vide de l'espace $\mathcal{C}_u(X,Y)$ ensemble des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit équicontinue est que l'adhérence $\overline{E}$ de E soit compacte dans $\mathcal{C}_u(X,Y)$ (c'est à dire que E est relativement compact).*

◇ • La condition est nécessaire: supposons que $\overline{E}$ soit compact. De tout recouvrement de $\overline{E}$ par une famille de boules ouvertes $B(f_\tau; r)_{\tau \in T}$ de centre $f_\tau \in \overline{E}$ et de même rayon $r > 0$, on peut extraire un recouvrement fini de $\overline{E}$ (et donc de E): $B(f_1, \varepsilon), \ldots, B(f_n, \varepsilon)$.

Pour chaque indice k $(1 \leq k \leq n)$, la continuité de f_k montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η_k tel que l'inégalité $d_X(x_1, x_2) \leq \eta_k$ implique $d_Y(f_k(x_1), f_k(x_2)) \leq \varepsilon$. Soit η le plus petit de ces η_k; pour tout f appartenant à E, donc à $\overline{E}$, on constate, en remarquant que f appartient à l'une des boules $B(f_k, \varepsilon)_{1 \leq k \leq n}$:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f_k(x_1)) + d_Y(f_k(x_1), f_k(x_2)) + d_Y(f_k(x_2), f(x_2)) \leq 3\varepsilon$$

donc, E est équicontinue.

•• La condition est suffisante: on suppose que la partie $E \subset \mathcal{C}_u(X,Y)$ est équicontinue, soit φ son module de continuité. Pour montrer que l'adhérence $\overline{E}$ de E dans $\mathcal{C}_u(X,Y)$ est compacte, il suffit de montrer que de toute suite infinie $S = (f_j)_{j \geq 0}$ d'éléments de E, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de $\mathcal{C}_u(X,Y)$ car alors, $\overline{E}$ étant fermé, cet limite sera dans $\overline{E}$.

L'espace Y étant compact, il est complet et l'espace topologique $\mathcal{C}_u(X,Y)$ est aussi complet. Il suffit donc de montrer que la suite S contient une suite de Cauchy qui sera donc convergente.

On considére un recouvrement de X par des boules ouvertes de rayon $r > 0$. Puisque X est compact, on peut en extraire un recouvrement fini de X par une famille finie de boules ouvertes de centres $x_k, 1 \leq k \leq n$, et de rayon r.

Comme Y est compact, on peut extraire de la suite $S = (f_j)_{j \geq 0}$ une sous-suite $S_1(x_1)$ telle que, pour tout f_p et tout f_q dans $S_1(x_1)$, on ait:

$$d_Y(f_p(x_1), f_q(x_1)) \leq \varphi(r).$$

De cette suite $S_1(x_1)$, on peut extraire une sous-suite $S_2(x_2)$ possédant la même propriété aux points x_1 et x_2, c'est à dire:

$$d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq \varphi(r) \text{ aux points } x = x_1 \text{ et } x = x_2.$$

Au bout de n opérations, on aura construit une sous-suite $S_n(x_n)$ possédant la même propriété aux points $x_1, \cdots x_n$. On la désignera par $S(r)$.

Or, par construction, pour tout $x \in X$, il existe un point x_i, $1 \leq i \leq n$, tel que $d(x, x_i) \leq r$, ce qui entraine $d_Y(f(x), f(x_i)) \leq \varphi(r)$ pour tout $b \in E$. Pour toutes les f et g appartenant à S(r), on a donc:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), g(x_i)) + d_Y(g(x_i), g(x)) \leq 3.\varphi(r)$$

On va itérer ce procédé qui permet d'associer à toute suite infinie S d'éléments de E une sous-suite $S(r)$. On peut considérer la suite $S(1)$ dont deux éléments quelconques f et g vérifieront l'inégalité:

$$d(f, g) = \sup_{x \in Y} d_Y(f(x), g(x)) \leq 3.\varphi(1)$$

De cette suite $S(1)$, on extrait une sous-suite que l'on notera $S(1, \frac{1}{2})$ dont deux éléments quelconques f et g vérifieront l'inégalité: $d(f, g) \leq 3.\varphi(\frac{1}{2})$.

On obtient ainsi, un tableau de suite:

$$\begin{array}{l} S(1) \\ S(1, \frac{1}{2}) \\ \vdots \\ S\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}\right) \\ \vdots \end{array}$$

On vérifie facilement que la suite diagonale est une suite de Cauchy.

◇

Chapitre 5

Régularité des solutions (variable réelle.)

Dans les chapitres précédents, on a prouvé (sous certaines réserves) l'existence de solutions d'équations différentielles et l'on a également appris à "comparer" ces solutions. On veut maintenant s'intéresser à la dépendance de ces solutions par rapport aux conditions initiales, ou par rapport à un paramètre figurant dans l'équation différentielle.

Dans toute la suite de ce chapitre, on se place, en dimension finie. Et donc H est un ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach E de dimension finie.

5.1 Méthode des approximations successives.

On a démontré qu'étant donné l'équation différentielle

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

résoudre le problème de Cauchy est équivalent à la résolution de l'équation intégrale :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{00} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds$$

La méthode des approximations successives consiste à former, par récurrence, une suite de fonctions $(x_n)_{n\geq 0}$ qui convergerait vers la solution de 5.1. Pour qu'une telle situation soit possible, il est nécessaire que le problème de Cauchy relatif à l'équation 5.1 ait une solution unique et, si cela n'est pas vrai, on peut trouver des exemples pour lesquels la suite formée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{x}_{n+1}(t) = \boldsymbol{x}_{00} + \int_{t_0}^{t} f_n(s, \boldsymbol{x}_n(s))ds$$

n'est pas convergente, quelle que soit la fonction $\boldsymbol{x}_0$ dont on parte. Par contre, si une telle suite est convergente pour $t \in I$, sa limite est une solution de l'équation différentielle 5.1 de conditions initiales $(t_0, \boldsymbol{x}_{00})$. On peut démontrer que ce sont des hypothèses lipschitziennes qui permettent d'assurer la convergence de ces suites de fonctions.

Notre but est d'étudier, à travers ce type de méthodes les propriètés de régularité des solutions de l'équation 5.1. Les notations sont les suivantes[1] : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, dont on suppose seulement qu'il n'est pas réduit à un point. L'espace de Banach "E" de dimension finie pourra donc être $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$. La fonction $f\ : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est supposée continue, lipschienne par rapport à la deuxième variable, de rapport k. Nous considérerons les conditions initiales $(t_0, x_{00}) \in I \times E$. Cette méthode redonne automatiquement, dans le cas f continue, le théorème d'existence déjà démontré.

---

[1] Ce sont les mêmes que celles des chapitres précédents.

Nous commencerons par démontrer un lemme technique.

Lemme 5.1.1 *Soient $\boldsymbol{g}_1$ et $\boldsymbol{g}_2$ deux fonctions définies et continues sur I, à valeurs dans E. L'entier n étant positif, on définit les deux fonctions $\boldsymbol{h}_i$, $(i = 1, 2)$:*

$$\boldsymbol{h}_i(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{g}_i(s))ds$$

On suppose que, quel que soit $t \in I$, et quel que soit l'entier naturel n, on ait :

$$\|\boldsymbol{g}_1(t) - \boldsymbol{g}_2(t)\| \leq Ck^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

(C désignant une constante strictement positive) alors on a, quel que soit $t \in I$:

$$\|\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t)\| \leq Ck^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

◇ Il suffit de faire les calculs :

$$\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{g}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{g}_2(s))ds$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{g}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{g}_2(s))\|ds \\
\|\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} k\|g_1(s) - \boldsymbol{g}_2(s)\|ds \\
\|\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t)\| &\leq Ck^{n+1} \int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^n}{n!} ds
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ◇

Théorème 5.1.1 *Considérons l'équation intégrale,*

$$\forall t \in I, \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{00} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds \tag{5.2}$$

Soit $\boldsymbol{x}_0$ une fonction quelconque définie sur I à valeur dans E. On pose :

$$\forall t \in I, \forall n \geq 0, \boldsymbol{x}_{n+1}(t) = \boldsymbol{x}_{00} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_n(s))ds$$

On a alors :

$$\forall t \in I, \forall n \geq 0, \|\boldsymbol{x}_{n+1}(t) - \boldsymbol{x}_n(t)\| \leq C(t)\frac{k^n|t - t_0|^n}{n!} \quad \text{où} \quad C(t) = \sup_{s \in [t_0, t]} \|\boldsymbol{x}_1(s) - \boldsymbol{x}_0(s)\| \tag{5.3}$$

◇ On suppose que la relation 5.3 (qui est vraie pour $n = 0$) est vraie jusqu'à l'ordre n et on vérifie qu'elle est alors exacte pour $n + 1$. ◇

Théorème 5.1.2 *Soient $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{y}_0$ deux fonctions arbitraires, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ et $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ les fonctions définies au moyen de la relation 5.2 à partir des données initiales $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{y}_0$. On a :*

$$\|\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{y}_n(t)\| \leq C(t)\frac{k^n|t - t_0|^n}{n!}$$

avec $C(t) = \sup_{s \in (t_0, t]} \|\boldsymbol{x}_0(s) - \boldsymbol{y}_0(s)\|$

◇ La démonstration se fait comme précedemment, par récurrence. ◇

Ce qui précède permet de retrouver le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions d'une équation lipschitzienne de conditions initiales données, démontré au chapitre précédent, mais que l'on va écrire sous une forme légèrement différente :

Théorème 5.1.3 *L'équation différentielle :*

$$x' = f(t, x)$$

admet une unique solution $t \to x(t)$ *de conditions initiales données* (t_0, x_{00}) *et l'on a :*

$$\|x(t) - x_{00}\| \leq e^{k|t-t_0|} \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_{00})\| ds$$

$$\textit{ainsi que} \quad \|x(t)\| \leq e^{k|t-t_0|} \left(\|x_{00}\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, 0)\| ds \right) \tag{5.4}$$

◇ La démonstration de l'existence et de l'unicité est immédiate : on choisit une fonction x_0 quelconque, par exemple, la fonction :

$$t \to x_0(t) = x_{00}.$$

La suite des (x_n) converge uniformément sur tout compacr de I vers une limite x. Cette limite est indépendante du choix de la première fonction x_0 puisque, si y_n est une autre suite du même type, $\|x_n - y_n\|$ tend vers 0. Elle est évidemment solution de l'équation différentielle puisque :

$$x_{n+1}(t) = x_{00} + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s)) ds$$

et que f est continue.

On démontre de la même façon l'unicité de la solution. On écrit ensuite :

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1}(t) - x_n(t))$$

et l'on a, par conséquent :

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} . \sup_{s \in [t_0, t]} \|x_1(s) - x_0(s)\| = e^{k|t-t_0|} . \sup_{s \in [t_0, t]} \|x_1(s) - x_0(s)\|$$

On obtient :

$$\|x(t) - x_{00}\| \leq e^{k|t-t_0|} \left(\int_{t_0}^{t} \|f(s, x_{00})\| ds \right)$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière en considérant la fonction $t \to x_0(t) = 0$. ◇

5.2 Continuité de la solution par rapport à un paramètre.

C'est un problème qui est souvent scindé en deux parties :

• On considère une famille d'équations différentielles : $x' = f(t, x, \lambda)$ et l'on étudie la continuité en λ des solutions de cette équation de conditions initiales fixes données (t_0, x_{00}).

•• On considère une seule équation différentielle : $x' = f(t, x)$ et les solutions de conditions initiales $(t_0(\lambda), x_0(\lambda))$ dépendant d'un paramètre. Les solutions dépendent aussi du paramètre λ et c'est leur continuité que l'on étudie.

Nous traiterons les deux problèmes en même temps.

Théorème 5.2.1 *Soit* Λ *un espace topologique et soit* λ *un paramètre qui décrit* Λ. *Soit* $f : I \times E \times \Lambda \to E$ *une application continue, lipschitzienne en* x. *On suppose, en outre, que les deux fonctions* $\lambda \to t_0(\lambda)$ *et* $\lambda \to x_0(\lambda)$ *sont des fonctions continues. On désignera par* x_λ *la solution de l'équation différentielle* $x' = f(t, x, \lambda)$ *de conditions initiales* $(t_0(\lambda), x_0(\lambda))$.

Alors, $x_\lambda(t)$ *converge uniformément, sur tout compact de* I*, vers* $x_{\lambda_0}(t)$ *quand* λ *tend vers* λ_0.